天測航法

S. Yamauchi

2017 年 7 月 22 日

目次

1 はじめに

経度の歴史を知る参考として，天測航法の概要を解説する。

2　天体の位置の表し方

天体の動きは，恒星が張り付いた天球が回転し，その間を太陽，惑星，月等が動くと考えると都合がよい。天球を外部から見た図を Fig.1 に示す。O が地球上の観測位置，NESW が水平線で N が北である。Z が

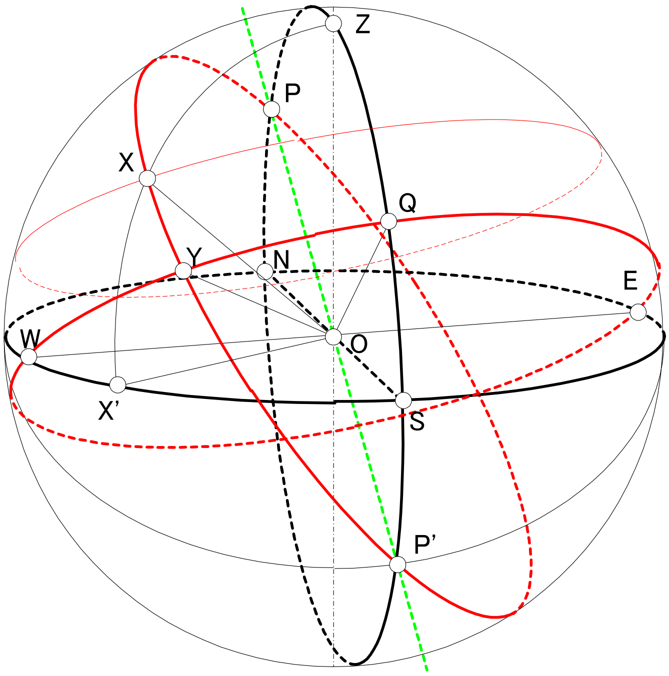

Fig. 1 天球上の天体位置の表し方

天頂で，NZS が真北・天頂・真南を通る大円 (子午線) である。地軸の北の延長線 P が天の北極で，反対側の P’ が天の南極，EQW が天の赤道である。地平線より下方の部分は地上 (海上) からは見えないが，参考のために示している。

対象とする天体 (恒星，太陽，月等) の位置を X で示す。X の位置を数値で表すには，地平座標または赤道座標が多く用いられる。この天体と天の北極・南極を通る大円は PXYP’ となる。

2.1　地平座標系

地上または洋上での観測から直ちに，天体の方位角と高度が得られる。

地平座標　地平座標では，方位角 A と高度 h を用いて天体の位置を表す。**方位角**は，真北を 0 °として時計回りに 0～360 °の角度で表す。**高度**は地平線上を 0 °として天頂を 90 °とする。地平線下にある天体についても，高度をマイナスとして表すこともできる。

Fig. 1 において，天体 X と天頂 Z を含む鉛直面と水平線の交点を X’ とすると，方位角は $A = \angle NOX'$ ，高度は $h = \angle X'OX$ である。天球は POP’ を軸として回転するので，時間が経過すると方位角，高度ともに変化する。

2.2　赤道座標系

天体 X の位置を赤道座標で表すこともできる。

赤道座標　地球の赤道を天球に投影した大円を**天の赤道** EQW とし，地球の北極・南極を投影した点を**天の北極** P・**天の南極** P' とし，地球の緯度と経度に相当する**赤緯**と**赤経** (または**時角**) を用いて表す。

時角を用いる場合は，天の北極から天頂-真南を通る大円 (天の子午線) PZQP' を 0 とし，西回り に 0〜24 時の角度 (1 時間は 15 °) で表す。つまり，その天体が観測位置の子午線を通過してから現在までの経過時間を角度 (時間) として表したものである。赤緯-時角座標は地球に固定されており，地球と共に回転すると考えることができる。天球に張り付いた恒星の赤緯は変化しないが，時角は経過時間だけ増加する。

時角に代えて**赤経**を用いる場合，**春分点** (太陽が天の赤道を南から北へ横切る位置) を 0 時とし，東回り に 0〜24 時の角度で表す。赤緯-赤経座標は天球に固定されており，天球とともに地球の回りを回転しているとみなすことができる。子午線の赤経は経過時間だけ増加する。

Fig. 1 において, 天体 X を通る天の時圏 (赤経一定の線) と天の赤道の交点を Y とすると, 赤緯は $\delta = \angle YOX$ ，時角は $T = \angle QOY$ である。

恒星，太陽，惑星，月の動き　恒星 は天球に固定されているため，その赤緯，赤経座標値は変化しないと見なせる。

一方 太陽，惑星，月 は天球上を規則的に移動しており，「天測暦」，「天体暦」でその赤緯-赤経が与えられている。いずれも天球上を赤道周辺に沿って 西から東の方向へ 移動するが，惑星は逆方向へ戻るときもある。太陽 は天球上のほぼ決まった軌跡 (赤道の上下に 1 周に 1 回蛇行する軌道) を 1 年周期で移動し，この軌跡を 黄道 (こうどう) と呼ぶ。黄道が赤道を南から北へ横切る点が春分点である。

月 は黄道に近い軌道を約 27.3 日 (太陽に対しては約 29.5 日) で一周するが，地球の引力のほかに太陽の引力等も受けるため，かなり複雑な動きをする。軌道は 8.85 年周期，18.60 年周期，等の変動も伴っている。

恒星時 (sidereal time)　太陽をもとにした通常の太陽時に対して，恒星 (春分点) の運動をもとにした時刻 を恒星時という。春分点 (にある星) が正中してから現在までの経過時間 (春分点の時角)，またはその時に 真南に見える星の赤経 として定義される。恒星の一巡 (地球の自転) は 23 時間 56 分 4 秒であり，これを 24 恒星時間と換算するので，1 恒星時間は (23 + 56/60 + 4/3600)/24 = 1/1.002739 太陽時間となる。恒星時は，恒星の位置を表すのに便利である。

イギリス・グリニッジでの子午線 (本初子午線) 上で測った恒星時を グリニッジ恒星時 GST と呼び，これ以外の地方での恒星時を 地方恒星時 LST と呼ぶ。両者の間に次の関係がある。

$$LST(\text{地方恒星時}) = GST(\text{グリニッジ恒星時}) + \lambda(\text{経度})$$

世界時 UT におけるグリニッジ恒星時 GST は，過去の観測値をもとに地球の自転速度と経過時間から算出することができる (付録 5.2 節)。

天球と地球を天の北極から見た図を Fig.2 に示す。

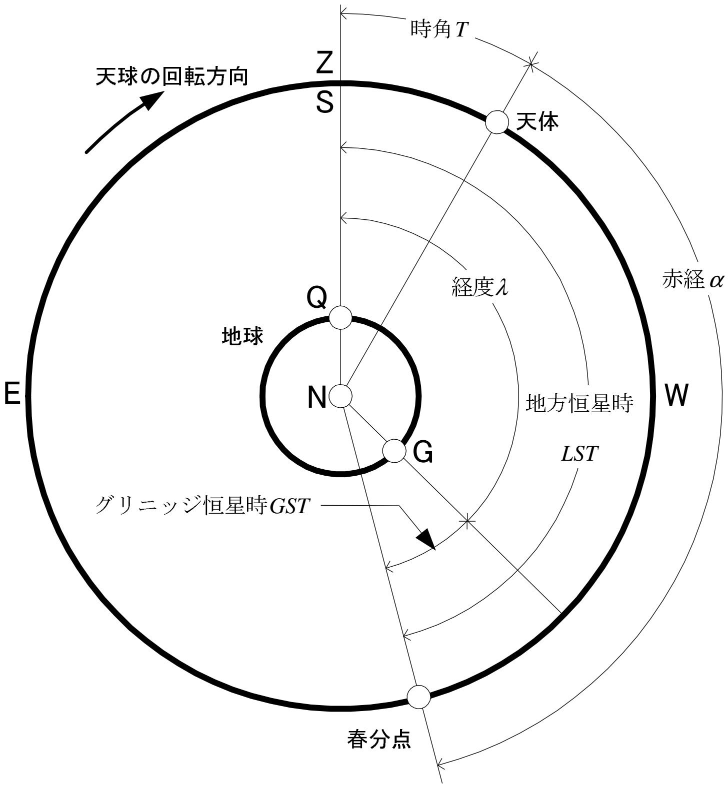

Fig. 2 時角，赤経，経度，恒星時の関係

地球上の Q が観測位置 (の子午線) で G がグリニッジ (本初子午線) である。角度はすべて時間の単位 (1 時間 = 15 °) で表すもの (明石天文台の経度は 9 時間) とし，図と同じ位置関係であれば正の値として，逆であれば負の値とし 24 時間を加えて正の時間で表すものとする。

図より時角，赤経，経度，恒星時の間に次式が成立することがわかる。

$$T(\text{時角}) + \alpha(\text{赤経}) = LST(\text{地方恒星時}) = GST(\text{グリニッジ恒星時}) + \lambda(\text{経度}) \tag{1}$$

地球は長周期 (周期約 25,800 年) の 歳差運動 を行っているため，天の赤道，北極，南極がゆっくりと動いている。それに合わせて赤緯-赤経座標系が変化するため，春分点の位置や恒星の座標が変化することになる。このような扱いをすると極めて煩雑となるので，ある基準時点の地球の位置をもとにして，天球に固定した座標系ですべてを表している。現在は 2000 年 1 月 1 日正午の値 (J2000.0 と表記) が用いられているが，それ以前は 1950 年の値 (B1950.0) が使われていた。

2.3　両座標系の換算

所定の天体を観測する，または観測結果から観測地の緯度と経度を求めるためには，地平座標系 の方位角と高度と，赤道座標系 の時角と赤緯との間の換算を行うことが必要である。

天球を天頂延長上の外部から見た図を Fig.3 に示す。NESW は水平線 (N が真北)，Z は天頂，WQE は天

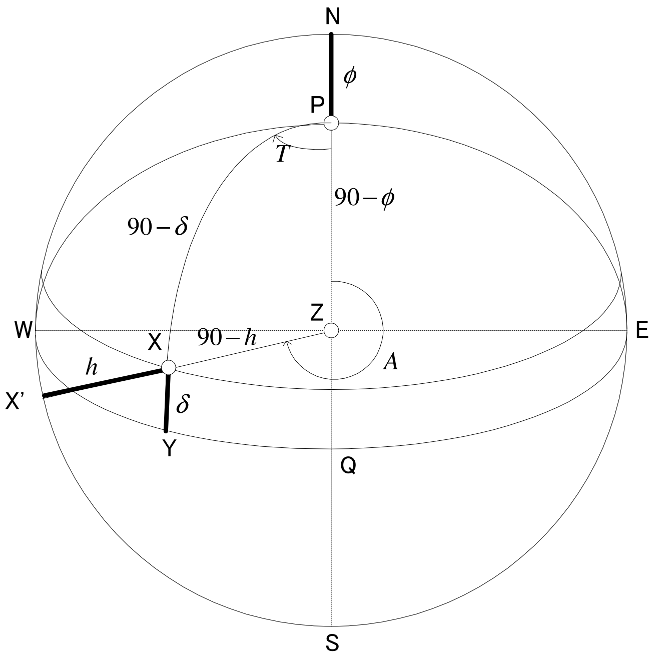

Fig. 3　赤道座標と地平座標

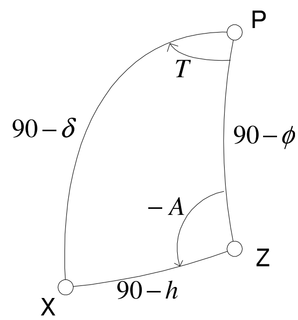

Fig. 4　球面三角形

の赤道，P は天の北極である (この図は地球の北半球から見た天球図を描いている)。観測地の緯度 ϕ は球面に沿う長さ NP に対する中心角であり，天球半径を 1 と仮定すれば，長さ NP そのものである (以下球面に沿う円弧長を中心角で表す)。

ある天体 X の方位を A，高度を h とすると，天体の時角 T ，赤緯 δ との関係は Fig.1 のようになる。

球面上の三角形 PZX を取り出して考える。三角形 PZX の 3 辺はいずれも大円の弧となっている。

付録 5.3 節 (球面三角形の諸定理) の式 (21), (23), (24), (26), (29) に，

$$A=-A, \qquad C=T, \qquad a=90-\delta, \qquad b=90-\phi, \qquad c=90-h$$

を代入すると，

$$\begin{aligned}
\cos(90-\delta) &= \cos(90-\phi)\cos(90-h)+\sin(90-\phi)\sin(90-h)\cos(-A) \\
\cos(90-h) &= \cos(90-\delta)\cos(90-\phi)+\sin(90-\delta)\sin(90-\phi)\cos T \\
\frac{\sin(-A)}{\sin(90-\delta)} &= \frac{\sin T}{\sin(90-h)} \\
\sin(90-\delta)\cos T &= \cos(90-h)\sin(90-\phi)-\sin(90-h)\cos(90-\phi)\cos(-A) \\
\sin(90-h)\cos(-A) &= \cos(90-\delta)\sin(90-\phi)-\sin(90-\delta)\cos(90-\phi)\cos T
\end{aligned}$$

つまり,

$$\sin\delta = \sin\phi\sin h + \cos\phi\cos h\cos A \tag{2}$$
$$\sin h = \sin\delta\sin\phi + \cos\delta\cos\phi\cos T \tag{3}$$
$$-\frac{\sin A}{\cos\delta} = \frac{\sin T}{\cos h} \tag{4}$$
$$\cos\delta\cos T = \sin h\cos\phi - \cos h\sin\phi\cos A \tag{5}$$
$$\cos h\cos A = \sin\delta\cos\phi - \cos\delta\sin\phi\cos T \tag{6}$$

式 (3), (4), (6) より,

赤緯 δ, 時角 T から高度 h, 方位 A を求めるには,

$$\sin h = \sin\delta\sin\phi + \cos\delta\cos\phi\cos T \tag{7}$$
$$\sin A = -\frac{\cos\delta\sin T}{\cos h} \tag{8}$$
$$\cos A = \frac{\sin\delta\cos\phi - \cos\delta\sin\phi\cos T}{\cos h} \tag{9}$$

を用いる。方位角 A は式 (8) の $\sin A$ の値と, 式 (9) の $\cos A$ の符号から求める。

また, 式 (2), (4), (5) より,

高度 h, 方位 A から赤緯 δ, 時角 T を求めるには

$$\sin\delta = \sin\phi\sin h + \cos\phi\cos h\cos A \tag{10}$$
$$\sin T = -\frac{\cos h\sin A}{\cos\delta} \tag{11}$$
$$\cos T = \frac{\sin h\cos\phi - \cos h\sin\phi\cos A}{\cos\delta} \tag{12}$$

を用いる。時角 T は式 (11) の $\sin T$ の値と, 式 (12) の $\cos T$ の符号から求める。

変換式をまとめると

赤緯・赤経と高度・方位の変換：

$$\begin{pmatrix} \text{赤緯} \\ \\ \text{赤経} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{式 (1a)} \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \text{式 (1a)} \end{matrix} \begin{pmatrix} \text{赤緯} \\ \\ \text{時角} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{式 (7), (8), (9)} \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \text{式 (10), (11), (12)} \end{matrix} \begin{pmatrix} \text{高度} \\ \\ \text{方位} \end{pmatrix}$$

赤経と時刻：

$$(\text{天体の時角}) + (\text{天体の赤経}) = (\text{地方恒星時} = \text{春分点の時角}) \tag{1a}$$

経度と時刻：

$$(\text{グリニッジ恒星時}) + (\text{経度}) = (\text{地方恒星時}) \tag{1b}$$

3　子午線高度緯度法による緯度と経度の決定

対象とする天体 (太陽，恒星等) が 正中 (天の子午線上に来ること) したときの高度 を測定し，これを用いて緯度を測定する (子午線高度緯度法)。また，経度を測定することもできる。

このためには，天体が正中したときに 天体と水平線が同時に見える ことが必要であり，雲が多くない昼間，または日出没前後か月明かりで水平線が見える夜間に限られる。

対象とする天体が正中したとき，天体の高度 h と赤緯 δ，観測位置の緯度 ϕ の関係は，Fig. 5 のようになる。これより，

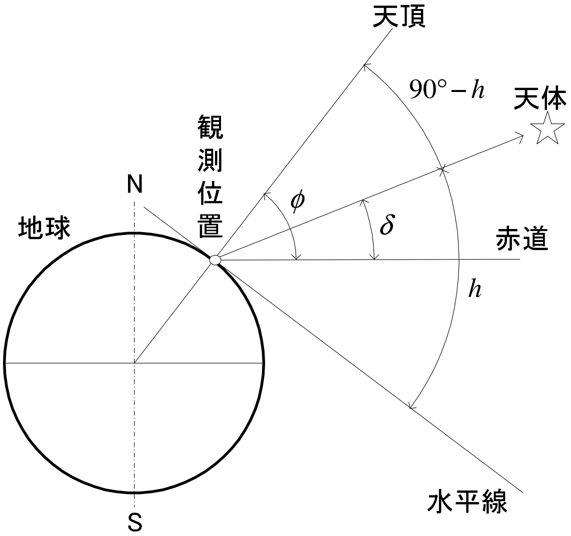

Fig. 5　緯度の測定

$$\phi = 90^\circ - h + \delta \tag{13}$$

として 緯度 が求まる。

また，式 (7) または (10) より，

$$\sin h = \cos(\delta - \phi) = \sin(90^\circ - \delta + \phi) = \sin(90^\circ + \delta - \phi)$$
$$\sin\delta = -\cos(\phi + h) = -\sin(90^\circ - \phi - h) = -\sin(90^\circ + \phi + h)$$

が得られ，このどちらからでも 赤緯 δ の増加関数となる高度 h を求めると，

$$h = 90^\circ + \delta - \phi$$

となり，式 (13) に一致している。

また，このとき観測位置の経度を求めることもできる。

対象とする天体が正中したとき，方位角 $A = 180^\circ$，時角 $T = 0$ であり，式 (1) は

$$\lambda = \alpha - GST \tag{14}$$

となる。正中時刻のグリニッジ恒星時 GST を求め，恒星の赤経 α との差をとれば 経度 となる。

緯度，経度の測定の手順は下記のようになる。

(1) 天体 (赤緯 δ，赤経 α) が正中する (天の子午線上に来る) 時刻 (世界時または日本標準時) を予測する。
(2) 予測時刻の少し前の時刻から天体の高度の観測 (六分儀等を使用) を開始する。
(3) 高度が最高となる時の高度 h および時刻 t を測定値として採用する。
(4) 式 (13) より，緯度 ϕ を求める。
(5) 時刻 t のグリニッジ恒星時 GST を求める (付録 5.2)。
(6) 式 (14) より，経度 λ を求める。

手順 (5) の GST 計算に手間を要するが，$GST - t$ の値の時間変化は小さい値であり，主な天体の年間各時刻ごとの $E = GST - t - \alpha$ の値が，「天測暦 (海上保安庁発行)」等で与えられている [3]。このとき，手順 (5) の代わりに「天測暦」から E の値を求め，

$$T_G = t + E = GST - \alpha \tag{15}$$

を用いて，[*1]

$$\lambda = -T_G \tag{16}$$

として，経度を求めることができる。T_G は，グリニッジで観測したその天体の時角に相当し，グリニッジ時角と呼ばれる。観測地点では時角 T は 0 となっているため，式 (16) は観測地とグリニッジでの時角の差が経度となっている ($\lambda = T - T_G$) との意味である。

実際には，観測した高度に対し，眼高差 (水面からの高さ) に対する補正，大気差 (大気による屈折) にたいする補正，視差 (地球中心と観測位置の差) に対する補正，視半径 (天体の中心と下端の視角度差) に対する補正等の処理を行う必要がある [3] が，ここでは割愛する。

[*1] 資料 [3] の E の値は，t として日本標準時を用いるときに式 (15) がグリニッジ時角となるように補正している。

4　高度差法による現在位置の補正 (位置の線)

前節の方法が使えない場合，現在位置の緯度，経度の推定値をもとに適当な天体の方位角と高度を推算し，高度の観測値との差を使って現在位置を補正することができる ([4],[5])。現在位置がずれると，天体の高度には大きく影響するが，方位角には余り影響しないという事情が背景にある。

時刻と推定経度を用いて天体の時角を推定し，推定緯度と推定時角を用いて，式 (7)〜(9) より，天体の方位角と高度を推定することができる。これをもとに，実際の天体の方位角 (コンパス) と高度 (六分儀) を観測し，高度の観測値が推定値より大きければ天体方向へ，推定値より小さければ天体と逆方向へ 現在位置を補正 する。補正量は高度差の $1'$ が 緯度の $1' = 1$ mile (nautical) $= 1.852$km となることを使えばよい。現在位置を観測方位方向 (または逆方向) へ高度差分移動し，移動方向 (観測方位角方向) に垂直な線を引けば，補正後の位置はこの線上のどこかになる。この線のことを 位置の線(LOP, Line Of Position) という。この「位置の線」は，天体の真下の地球上の地点を中心とする円の一部であると考えられ，この円上のどの位置から天体を見ても，同一の高度となる。対象とする天体を複数選べば，複数の「位置の線」が引けるので，交点または多角形内部の点として補正後の位置が定まる (Fig.6)。

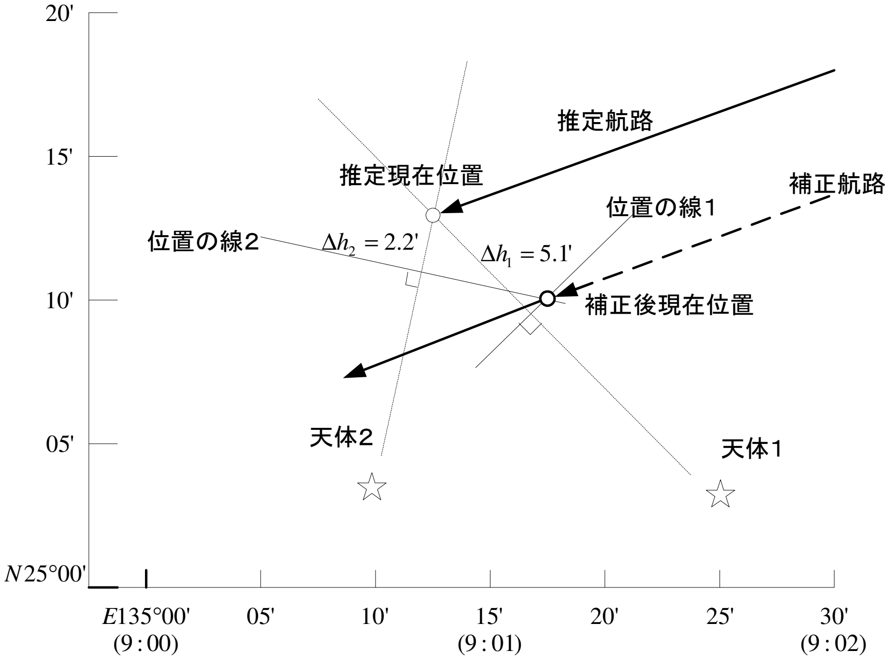

Fig. 6　海図上の高度差法

具体的な手順は以下のようになる。

(1) 現在位置の推定緯度 ϕ，推定経度 λ を求める。
(2) 時刻 t を用いて，グリニッジ恒星時 GST を求め，対象とする天体の赤経 α を用いて式 (1) より，推定時角 T を求める。
    または，時刻 t を用いて，天測暦等によりその天体のグリニッジ時角 $T_G = t + E$ を求め，$T = T_G + \lambda$ より推定時角 T を求める。
(3) 式 (7)〜(9) を用いて，方位角および高度の推定値 A，h を求める。
(4) 天体の方位角 A' および高度 h' を観測する。
(5) 高度差 $\Delta h = h' - h$ を求め，$\Delta h > 0$ なら天体の観測方位 (または推定方位) 方向へ, $\Delta h < 0$ なら逆方向へ, 推定現在位置を (1 分 = 1.852km) シフトする。
(6) シフト後の推定現在位置を通り方位角に垂直に「位置の線」を記入する。現在位置は「位置の線」上にあると推定される。

上の手順を同時に (または時間をずらして) 複数の天体に対して実施すれば，補正後の位置が求まる。2 つの天体を観測する場合は方位角の差が 90 °に近いものを選ぶのがよい。3 つの天体を観測すれば，3 本の位置の線で囲まれる三角形の中央を補正位置とする。

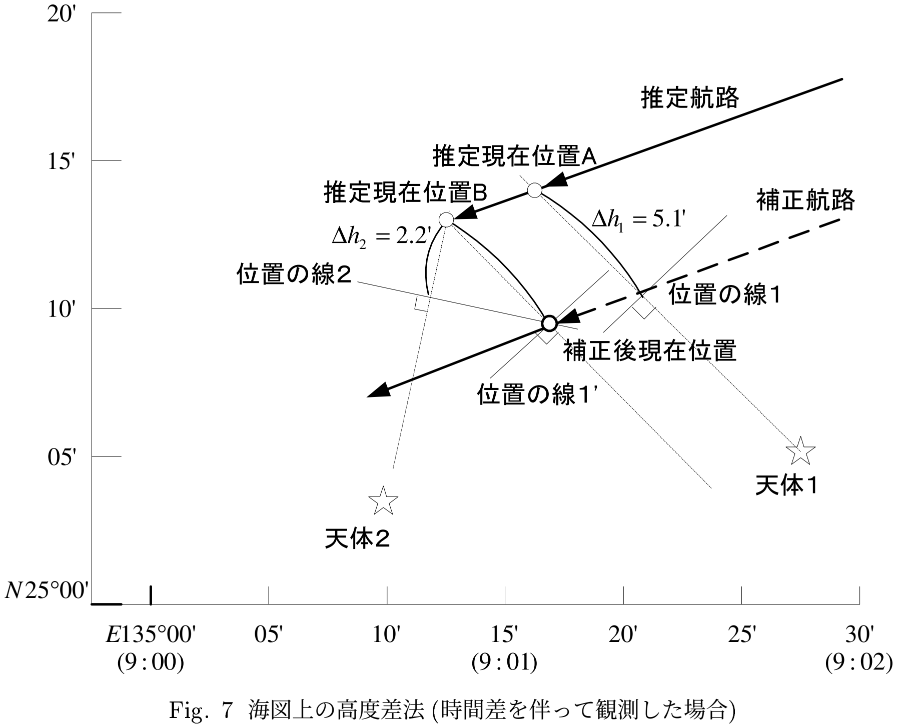

Fig. 7 海図上の高度差法 (時間差を伴って観測した場合)

天体 1 の観測からある時間遅れて天体 2 を観測した場合の高度差法による位置補正の例を，Fig.7 に示す。要点は，以前の時刻に観測して作成した位置の線を，現在の推定位置へ平行移動すればよいだけである。

5 付録

5.1 経度の表示

Table 1 時間表示と角度表示

時間表示	角度表示
12 h	180 °
1 h	15 °
4 min	1 °
1 min	15’
4 sec	1’
1 sec	15”

5.2 グリニッジ恒星時の算出方法

グリニッジ恒星時は，その時刻においてグリニッジで観測した春分点の時角である。任意時刻のグリニッジ恒星時は，過去のある時刻で観測したグリニッジ恒星時を用いて，算出することができる。以下に一例を紹介する ([1][2])。起点とした値は，世界時 1968 年 5 月 24 日 0 時 でグリニッジ恒星時 0.671262 day (16:6’37.0368") となることである。

まず，時差をもとに対象時刻の世界時を求める。

$$\text{世界時}\ (UT) = \text{日本標準時}\ (JST) - 9\ \text{時}$$

次に，次式により世界時 (UT) の修正ユリウス日 MJD (1858 年 11 月 17 日 0 時 0 分 0 秒からの日数) を求める。UT の年を Y，月を M，日を D，時間を h，分を m，秒を s とする。ただし，1 月と 2 月はそれぞれ前年 (Y の値を-1 する) の 13 月，14 月として代入する (例: 2013 年 2 月 5 日の場合，Y=2012, M=14, D=5)。

$$MJD = \lfloor 365.25Y \rfloor + \lfloor Y/400 \rfloor - \lfloor Y/100 \rfloor + \lfloor 30.59(M-2) \rfloor + D - 678912 + \frac{h}{24} + \frac{m}{1440} + \frac{s}{86\,400} \tag{17}$$

$\lfloor x \rfloor$ は，x を越えない最大の整数 (床関数) である。

この MJD を用いて，次式によりグリニッジ恒星時 (平均春分点に準拠する恒星時)GST を求める。

$$GSD = 0.671\,262 + 1.002\,737\,9094 \times MJD \tag{18}$$

$$GSD' = GSD - \lfloor GSD \rfloor \tag{19}$$

$$GST = 24^h \times GSD' \tag{20}$$

GSD は day で表したグリニッジ恒星時で， GSD’ はその小数部分である。

5.3 球面三角形の諸定理

単位半径の球面上の大円を 3 辺とする三角形 を考える。球面上での角度 (接線の角度) を A, B, C とし，そ

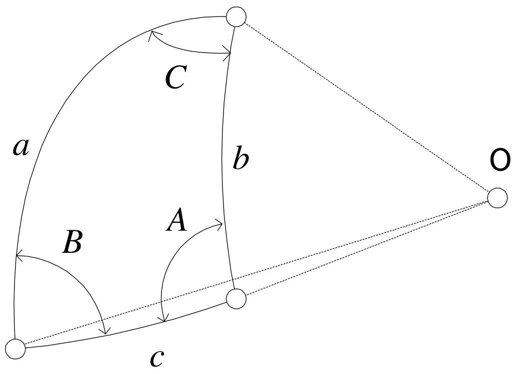

Fig. 8 球面三角形

れぞれの対辺の長さを a, b, c とする。単位半径の球であるから，辺 a, b, c の長さはそれぞれの 中心角 に一致している。

この球面三角形では次の定理が成り立つ。

余弦定理：

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \tag{21}$$
$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B \tag{22}$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \tag{23}$$

正弦定理：

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \tag{24}$$

正弦ě余弦定理：

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \tag{25}$$
$$\sin a \cos C = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A \tag{26}$$
$$\sin b \cos C = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B \tag{27}$$
$$\sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B \tag{28}$$
$$\sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C \tag{29}$$
$$\sin c \cos B = \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C \tag{30}$$

参考文献

[1] Web Page, "http://ja.wikipedia.org/wiki/**恒星時**", (2014.1.13).

[2] Web Page, "http://hoshizora.yokochou.com/calculation/sidereal_time.html", (2014.1.13).

[3] 海上保安庁, "**平成** 26 **年度天測略暦**", 日本水路協会 (2013).

[4] Web Page, "http://www.nexyzbb.ne.jp/ j_sunami76/ichi_ten.html", (2014.1.13).

[5] Web Page, "http://ja.wikipedia.org/wiki/**天測航法**", (2014.1.13).