

2 . 惑星の動きと運動の法則の発見 (特別講義:科学技術史)

S. Yamauchi

2017年7月22日

目次

0	はじめに	2
1	コペルニクスの転回	2
1.1	プトレマイオスの宇宙体系	2
1.2	コペルニクス	7
1.3	ティコ・ブラーエ	9
2	ケプラーとガリレオ	10
2.1	ケプラー	10
2.2	ガリレオ・ガリレイ	13
2.3	ガリレオの力学	15
3	ニュートン	26
3.1	生涯	26
3.2	プリンキピアにまつわる逸話	27
3.3	ニュートンによる運動の法則	28
3.4	向心力を見出すことについて	29
3.5	楕円軌道上の物体の運動について	34
3.6	物体の直線の上昇および降下について	38
3.7	任意の向心力による物体の軌道を見出すことについて	40
4	まとめ	43

0 はじめに

今回は、ニュートン力学の成立にまつわる有名な話をたどる。ニュートンは1687年にプリンキピア(『自然哲学の数学的原理』)を著して、距離の2乗に反比例する「万有引力の法則」と「運動の法則」を発見したとされている。その前提は、まず、地球を含めて惑星が太陽の周りを回っているというコペルニクスの「地動説」があり、次に、占星術師ティコ・ブラーエの「惑星運動の精密な観測」があり、その次に、その観測結果を基にした「惑星の運動に関するケプラーの法則」があり、「ケプラーの法則」を説明するためにニュートンは、万有引力の法則と運動の法則が成り立つことを導いた、ということになっている。

運動の法則自体は、それ以前のガリレオ・ガリレイなども同じようなことを述べており、ガリレオやニュートンがどこまで成し遂げたのかを、知っておく必要があるだろう。

前半の話はさほど難しくはないであろうが、後半の力学は、力学というより幾何学であり、理解するのが大変である。ガリレオの著書は何とか(もちろん日本語で)読めるが、ニュートンのプリンキピアは読んで分かるような本ではない。本稿も、解説書と見比べながら(主に解説書を見ながら)作成した。それでもまだ、分かりにくいかもしれないが、現在の力学との違いを読み取ってほしい。

1 コペルニクスの転回

「コペルニクスの転回」とは、イマヌエル・カント(1724-1804)が自分の哲学の立場を示すために用いた言葉である。それまで、「認識は対象に依拠する」とされていたのを逆にして、カントは、「対象の認識は主観の先天的形式によって構成される」と論じた。この主客逆転は、認識は経験の範囲を越えられないとするイギリスの経験論哲学を越えて、新しくドイツ観念論哲学を切り開いたとされている(?)。

「コペルニクスの転回」とは、発想法を根本的に変えることによって、物事の新しい局面が切り開かれることをいう例えとして、よく用いられる。では、当のコペルニクスは、一体何をしたのであるだろうか？

1.1 プトレマイオスの宇宙体系

エウドクソスの同心天球 BC4世紀、古代ギリシアのエウドクソス(Eudoxos, BC4世紀)は、地球を中心に重層する天球が包む宇宙を考えた[1]。いちばん外側の天球には恒星が散りばめられており(恒星球)、天の北極を軸に東から西へ約1日で回転する。太陽を抱える天球は恒星球に対して逆方向に西から東へ、約1年で回転する。太陽の回転軸は恒星球の回転軸とは傾いているために、1年の間でその南中高度が変わり、季節が説明される。恒星球と太陽の間に、惑星を運行させる天球を置いた。惑星は星座の中をゆっくりと西から東へ動くように見えるが、天球上で速さを変えたり、逆行することがある。これらを説明するために、1つの惑星の運行に対して、回転方向や速度の異なる複数の天球を用意した。エウドクソスの同心天球はアリストテレスの宇宙像にも組み入れられた。

アポロニウスの周転円 ギリシャのアポロニウス (Apollonius of Perga; BC262 頃-BC190 頃) は、

惑星が単に円運動を描くのではなく、地球を中心とした円運動 (従円または導円と呼ばれる) をする点を中心とした別の小さな円 (周転円) の上を動くと考えた [1]。アポロニウスの惑星軌道の概念図を Fig.1 に示す。

太陽はある円軌道 (これも従円) に沿って動き、内惑星 (水星, 金星) は地球から太陽を見通す線上に中心を持つ周転円に沿って動く。外惑星 (火星) は太陽の外側の大きな従円の上の点を中心とした周転円上を動く。恒星球 (天球) から見ると、いずれも西から東向き (北極方向から見て反時計回り) に回転している。

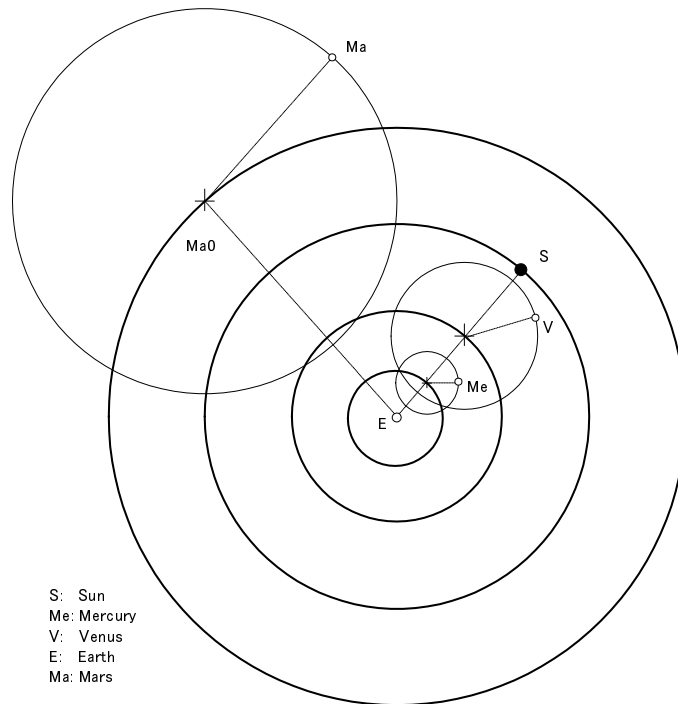


Fig. 1 アポロニウスの宇宙

ここでもし、Fig.2 のように惑星が太陽を中心とする同一平面内の円運動をするとすると、地球中心に書き直して Fig.3 が得られる。太陽は太陽-地球間距離 \overline{ES} を半径とする円運動となる。内惑星は太陽と共に \overline{ES} だけ平行移動したものであり、従円上の太陽のまわりを回る周転円上を動くことになる。一方、外惑星については、太陽-地球間距離 \overline{ES} だけ惑星 Ma を平行移動すれば、元の惑星位置 $Ma0$ を中心とする半径 \overline{ES} の周転円上を動くことになる。外惑星の周転円の動径 ($\overline{Ma0 - Ma}$) は太陽の動径 \overline{ES} に等しい。

地球からの観測では惑星までの距離は知ることができないので、内惑星の見通し角が同じになるように周転円を縮めながら地球に近づければ、Fig.3 は Fig.1 に一致する。もし、惑星が太陽を中心とする同一平面内の円運動をするとするすれば、Fig.2 と Fig.3 とはまったく等価であり、天動説でも矛盾が生じないことになる。

アポロニウスの周転円により、惑星の接近による明るさの変化、巡行と逆行の速度の差などを、概ね説明することができた。

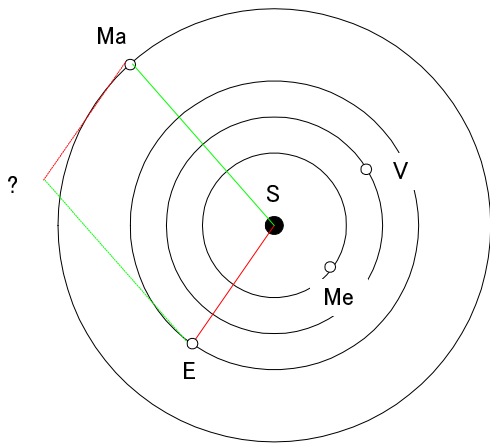


Fig. 2 惑星の軌道

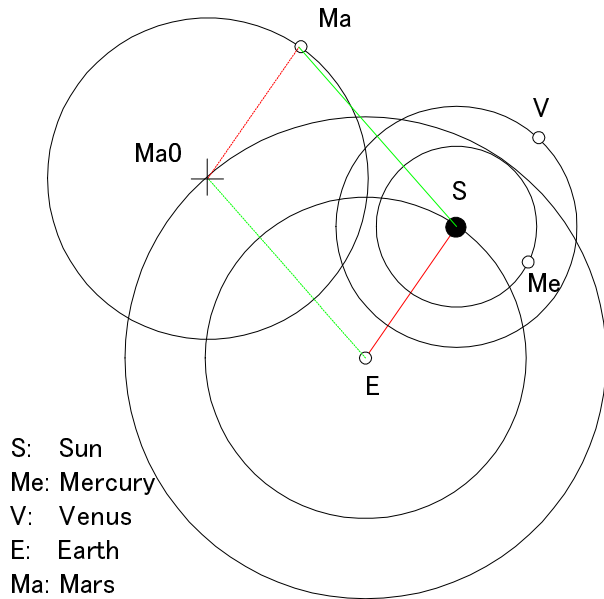


Fig. 3 地動説

しかし、実際には地球も含めて惑星の運動は(円に近い)楕円であるため、上の計算から少しずれる。例えば、春分点から夏至を経て秋分点までの期間は、秋分点から冬至を経て春分までの期間より幾日か(7~8日)長くなることについて、紀元前のギリシャでは既に知られていた。

ヒッパルコス (Hipparchus ; BC190 頃-BC125 頃) はこれを説明するために、地球は天球上の太陽の軌道(従円)の中心からずれている(離心円)と考えた (Fig.4)[2] *1。同様に、惑星の従円の中心(離心; eccentric)も地球からずれているとした。

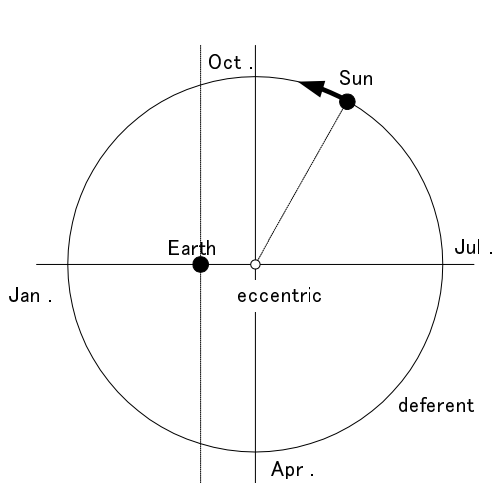


Fig. 4 ヒッパルコスの太陽の軌道

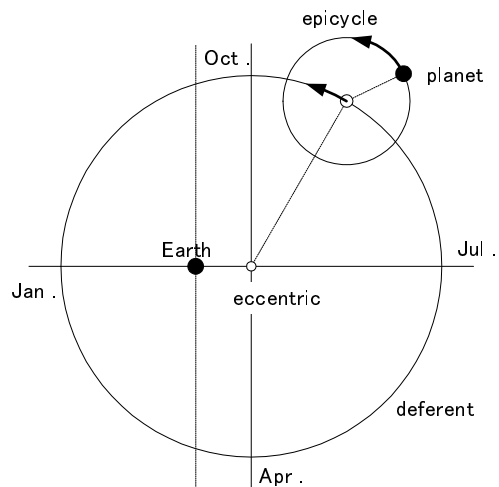


Fig. 5 ヒッパルコスの惑星の軌道

*1 現在の近日点は1月上旬 [3]。

Fig.4 では、太陽は離心 (eccentric) の回りを等角速度で回るので、地球から見ると天球上の太陽は、冬の期間の方が速く動くことになる。ヒッパルコス計算では、地球と離心間の距離は半径の $1/24$ となっている。

プトレマイオスのアルmageスト 3 世紀ほど後の AD150 年頃、アレキサンドリアのプトレマイオス (Claudius Ptolemaeus, 83 年頃 - 168 年頃) は、その後の観測結果に合わせるために、ヒッパルコスのモデルに修正を加え、それまでの天文学を集大成して、「数学的総合全 13 巻」にまとめた。



Fig. 6 Claudius Ptolemaeus

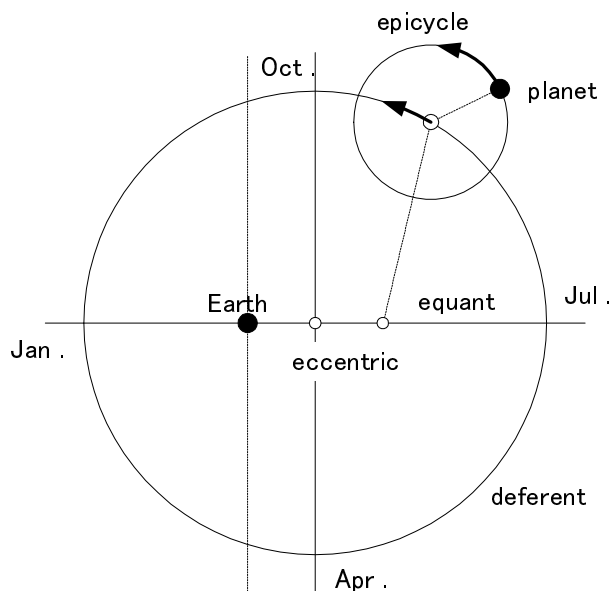


Fig. 7 プトレマイオスの惑星の軌道

この本は 700 年ほどの後、9 世紀になってアラビアの天文学者の注目を集めるようになり、アラビア語に翻訳されて「最大の書」と呼ばれた。さらに 300 年ほどたった 12 世紀になってラテン語に翻訳され、アラビア語の「最大の書」を音訳した「アルmageスト」の名で知られるようになった。アポロニウス、ヒッパルコスの説も、この本を通じて知られるのみである。「アルmageスト」13 巻の各巻の内容は以下のとおりである [5]。

- 1 巻：アリストテレスの宇宙論の概要，弦 (chord) の長さの表，球面三角法の導入
 - 2 巻：天体の出没，昼の長さなど，天体の日周運動に関連する問題
 - 3 巻：太陽の運動
 - 4, 5 巻：月の運動，月の視差，地球に対する太陽と月の大きさ，距離
 - 6 巻：日食，月食
 - 7, 8 巻：恒星の運動，分点の歳差，星表。この星表では最も明るい星は 1 等 ($m = 1$)，肉眼で見ることができる最も暗い星は 6 等 ($m = 6$) と記されている。それぞれの等級は 1 段階暗い等級よりも 2 倍明るいと考えられていた。この等級の仕組みはヒッパルコスによって発明されたと考えられている。
 - 9 巻：肉眼で見える 5 惑星のモデルを構築する際の一般的問題，水星の運動
 - 10 巻：金星・火星の運動
 - 11 巻：木星・土星の運動
 - 12 巻：留と逆行 (惑星が背景の黄道十二宮に対してしばらく停止し，その後逆方向へ移動する運動)。
- プトレマイオスは外惑星だけでなく水星と金星に対してもこれらの用語を用いるべきであるとした。

13 巻：黄緯方向の運動 (惑星の黄道からのずれ)

Fig.7 に示すプトレマイオスのモデルでは、従円の中心に離心があり、地球が離心から離れた位地にある点はヒッパルコスと同じである。このモデルではさらに、地球と対称位置にエカント (equant) と呼ばれる回転中心があり、太陽または周転円の中心はエカントから見た角速度が一定となるように動くこととされている [2]。従って、太陽 (または周転円中心) が地球に近い冬季の間は太陽は従円上を速く動き、逆に夏季は遅く動くことになる。地球から見た角度で考えると、この角速度の差はヒッパルコスのモデルよりも大きくなる。

プトレマイオスの体系では、地球から、月、水星、金星、太陽、火星、木星、土星の順に積み重ね、この順に離心円 (従円) の径が大きくなる。一つの惑星の運動を表すのに、恒星球の日周運動、従円と周転円に加えて、離心円の中心の運動、エカント点を中心とする角度など、5 つの動きを導入した [1]。

「アルマゲスト」は、中世イスラム世界を経て中世ヨーロッパへ引き継がれた。プトレマイオスの体系は、惑星の観測結果によく合致し、1500 年にわたって高い権威を持ち続けた [1]。

1.2 コペルニクス

生涯 ニコラウス・コペルニクス (Nicolaus Copernicus; 1473-1543) は、ポーランドのトルンで銅を商う裕福な商人のもとで生まれた。10歳の時父親が亡くなり、教会の律修司祭 (カノン) の伯父の元で育てられ、首都のクラクフ大学で数学と天文学を学んだ。卒業後、教会の職につき4年と少しの間トルンにいた後、イタリアのボローニャ大学やパドヴァ大学で法律 (教会法) や医学を学んだ。

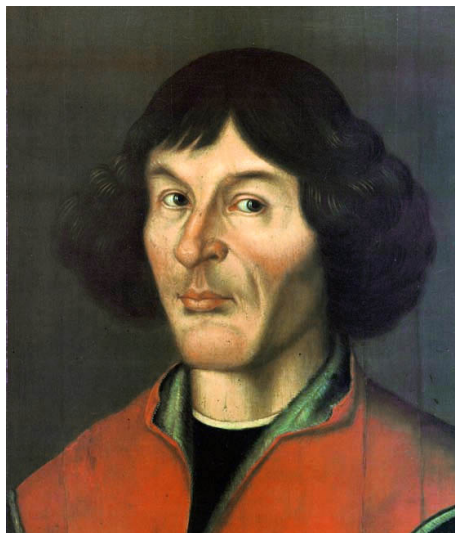


Fig. 8 Nicolaus Copernicus

ボローニャ大学で、著名な天文学者であるドメニコ・マリア・ノヴァーラ (伊) と出会い、強い影響を受けた。30歳で帰国し、伯父の専属の補佐役として働き、天文学 (数学) に取り組んだ [7]。1510年頃、地動説の基本的なアイデアを短い冊子にまとめて、友人たちに送った (冊子は「コメンタリオルス」と呼ばれている)。ギリシア語で書かれた書簡集のラテン語訳を出版している。伯父死去後も、ドイツ騎士団との紛争の仲介や、貨幣鑄造についての意見書提出等、行政官としても大いに活躍した。また、理論を正確にするための天文観測も続けていた。

晩年になって、唯一の弟子のレティクスの働きかけで、自説についての書籍「天体の回転について」を執筆し、1543年の死の直前に出版した [6]。

考え方 天動説 (地球中心説) の Fig.1 において、惑星までの距離は単なる推測でしかない。惑星軌道の視半径 (角度) を一定にして地球と惑星間の距離を調整すると、Fig.9 (Fig.3 に同じ) とすることができる。外惑星 (火星) の周転円半径は全て同じで地球-太陽間の距離に一致する。このとき従円の動径 (長さ) と方向は、どの惑星に対しても地球から太陽へ至る動径に等しくなる。内惑星 (火星) のは地球を巡回する太陽の回りを同心で異なる半径の周転円で回る。周転円半径は全て同じで地球-太陽間の距離に一致する。

Fig.9 の地球、太陽、各惑星を平行移動して、太陽を元の地球の位置にもってくれば Fig.10 となる。コペルニクスが行ったことは、この操作である。

かくして、太陽中心の宇宙体系ができ、また周転円軌道上を動いているように観測される理由も説明できた。しかし、コペルニクスも当時の人々と同じく、天の運動は完全でなければならず、完全なものは円または

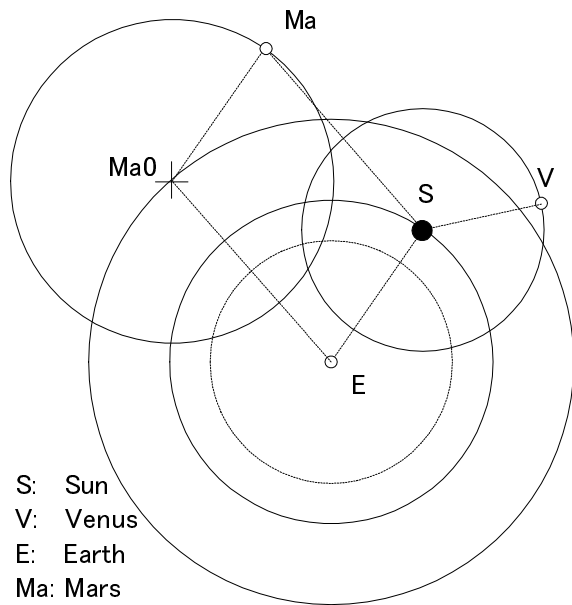


Fig. 9 地球中心説

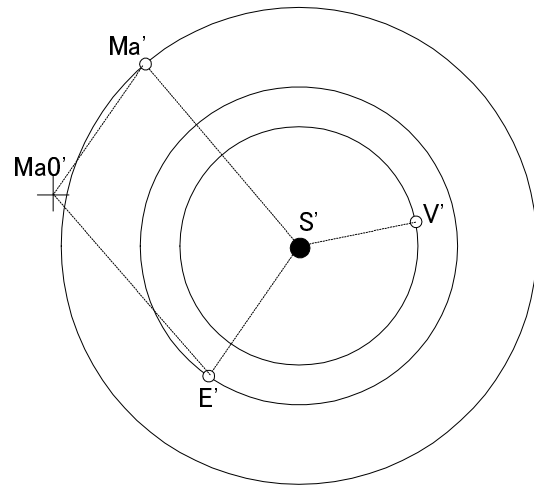


Fig. 10 コペルニクスの太陽中心説

球であると考えていた。精巧なプトレマイオスのモデルと同等な惑星運動を表すには、やはり離心円と小周転円 (エカントまたは二重周転円に相当) を用いざるを得なかった。

地動説を唱えたのはコペルニクスが最初ではなかったが、彼の功績は、地動説をもとにした惑星運動の予測法を、プトレマイオスと同等の精度にまで上げたことにあるといえる。しかし、実際の予測ではプトレマイオスを越えることはできなかった [7]。



Fig. 11 ティコ・ブラーエ

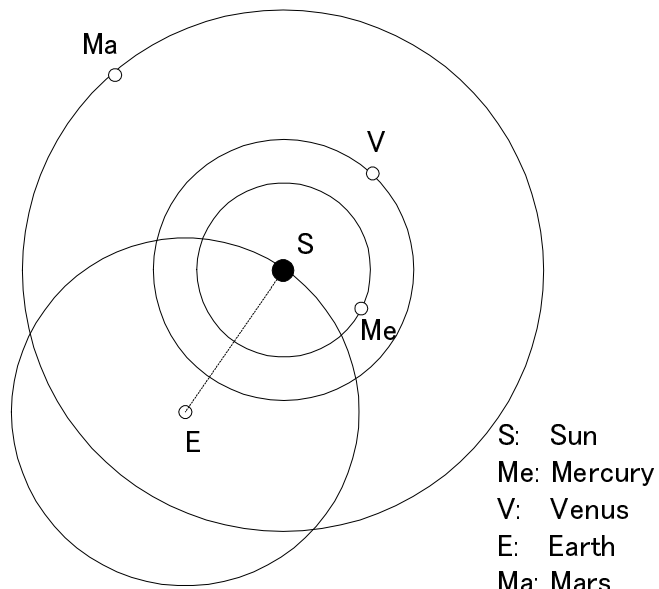


Fig. 12 ティコ・ブラーエの宇宙像

1.3 ティコ・ブラーエ

生涯 ティコ・ブラーエ (Tycho Brahe 1546-1601) は、デンマークの貴族の家に生まれた。伯父の養子として育てられ、1560年の日食を契機に天体に興味を持ち、ドイツのライプツヒ大学、ロストック大学で学び、在籍中から占星術による予言を行っていた。

1572年、カシオペア座に超新星(通称「ティコの新星」)を発見し、詳細に観察、記録した。

デンマーク王フレゼリク2世の支援を受け、ヴェン島にウラニポリ(天の城)天文台、ステルネポリ(星の城)天文台を建設し、大量かつ精密な観測記録を残した。フレゼリク2世が没した後、1599年に神聖ローマ帝国皇帝ルドルフ2世の皇室付帝国数学官に迎えられ、プラハに移住した。

ティコ・ブラーエは、1577年に出現した彗星についても多くの観測結果を残し、その現象が月よりも遠方で起きていることを証明した。この彗星の観測結果と、さきの新星の発見は、月よりも遠方ではいかなる変化も起きないと考える天動説を覆す重要な証拠ともなった。彼の残した膨大な天体の観測結果は、望遠鏡が使用される以前の肉眼による天体観測としては最高の精度を誇るものであった。

本人は自身の観測記録をまとめる前に病死したが、弟子であり共同研究者でもあったヨハネス・ケプラーがその記録を解析し、ケプラーの法則を発見した。

貢献 ティコ自身は占星術師であり、天体の運行を見て国家や社会の動向を占う「マンデン占星術」を信じていた。占星術を的中させるには、天体の運行を可能な限り正確に知っておかなければならないと考え、緻密で正確な天体観測を行おうとした。

膨大なデータを見てきたティコ自身は、天動説に無理があることに気づいていたが、地球が太陽の回りを回るとすると当然観測されるはずの年周視差が観測できなかったことから、地動説には否定的だった。「太陽は地球のまわりを公転し、その太陽のまわりを惑星が公転している」という「修正天動説」を提唱した。

ティコの最大の功績は、惑星運動の正確な記録を残したことであり、これがケプラーの法則、さらにはニュートンの万有引力と運動の法則へと繋がる。

2 ケプラーとガリレオ

2.1 ケプラー

ヨハネス・ケプラー (Johannes Kepler, 1571-1630) は「ケプラーの三法則」で有名なドイツの天文学者。特に、惑星の軌道が円ではなく楕円であること、惑星の動く速さが一定でないことを示し、天文学の新たなステージを切り拓いた。グラーツ、プラハ、リンツなどを転々とし、数学教師や、天文計算などを行う数学官として生活した。二度結婚しており、多くの子どもを授かった。

天文学では数学的規則だけでなく物理的原因も探究すべきだという考えに立って研究を進めた。惑星の運行や配置に隠された数学的關係の中に世界を創造した神の御業を見ていた人物でもある。また、光学や数学の分野でも独創的な貢献をした。

生涯 ケプラーは、南西ドイツ (神聖ローマ帝国) の小都市、ヴァイル・デア・シュタットで生まれた。父親はケプラーが 20 歳になる前に死んでしまい、ヨハネスは七人きょうだいの長男として、主に母親に育てられた [7][9]。

12 歳のとき、神学校に入学し、17 歳でチュービンゲン大学に進み、教養課程を経てさらに神学の勉強を進めた。プロテスタントの聖職者になるのが彼の目標だったが、神学のほかにミヒャエル・メストリンから数学と天文学を学んでいた。その才能が認められて、1594 年 (22 歳) 神学課程を修了する直前に、オーストリアのグラーツにある神学校の数学教師に推薦された。

グラーツでのケプラーは、学校教師としての仕事のほかに、地区の数学官という職務も兼ねていた。その主な仕事は天文学に基づく暦の作成と、翌年の出来事について占星術を使った予測をすることであった。

1597 年に、実業家の娘バルバラ・ミュラーと結婚したが、翌年にはオーストリア大公フェルディナント 2 世がグラーツからのプロテスタントの聖職者・教師の退去を命じ、ケプラーは職を追われた。

そんな中、ティコ・ブラーエから誘いを受けて、1600 年に家族を連れてプラハに移った。ケプラーがティコのもとへ移った 1 年後に、ティコが死んでしまった。

1601 年にティコが亡くなると、ケプラーはブラーエの後任のルドルフ 2 世宮廷付数学官 (占星術師) となり、ティコの仕事を引き継ぐことになった。最大の業務は、ティコの観測に基づいて天体の運行をまとめた表、『ルドルフ表』を完成・出版することだった。

1604 年に、『天文学の光学的部分』を書き、ものが見えるのは目がレンズの作用をしているためだと主張し、1609 年には『新天文学』で、いわゆるケプラーの第一法則、第二法則を提示した。この本では、太陽からの「力」によって惑星が動かされているという考えも述べられている。

1611 年には 3 人の子のうち一人と妻のバルバラが死去し、1612 年にパトロンであったルドルフ 2 世が亡くなると、ケプラーはプラハを離れ、オーストリアのリンツに州数学官の職を得た。

1613 年にはズザナ・ロイティンガーと再婚し、1619 年には『宇宙の調和』で、ケプラーの第三法則を発表した。

1620 年から 1621 年には故郷ヴュルテンベルグにおいて母カタリーナが魔女裁判に掛けられたため、その地にとどまって裁判と弁護に奔走し、1621 年に無罪判決を勝ち取ったが、その半年後に母が亡くなった。

1626 年には反乱軍によってリンツが被害を受けたためウルムへと移り、ここで 1627 年にはルドルフ表を完成させた。1630 年、レーゲンスブルクで病死した。

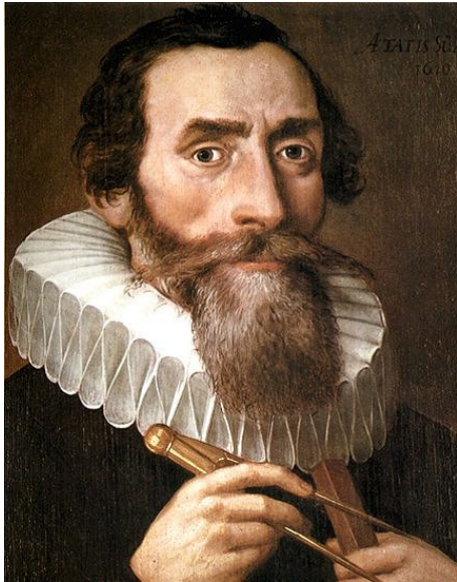


Fig. 13 Johannes Kepler

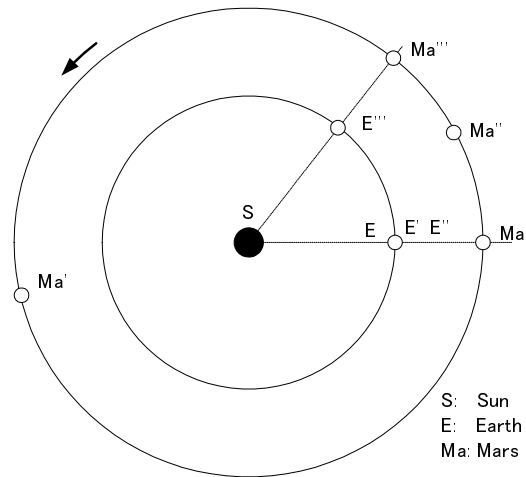


Fig. 14 地球と火星の公転周期

貢献 ケプラーの真の功績は、数学的な裏付けを持った物理モデルを提出するという方法の先駆者だった所にある。ティコの正確な観測結果をもとに、惑星運動に関する法則 (ケプラーの法則) を示した。これによって太陽中心説 (地動説) は、従来の天動説よりも単純かつ正確なものとなった。このケプラーの法則は、ニュートンの万有引力と運動の法則を経てその後の古典力学の成立へとつながった。

ケプラーの法則

第1法則 (楕円軌道の法則)： 惑星は、太陽をひとつの焦点とする楕円軌道上を動く。これは、惑星の軌道が太陽を含む一平面内にあることも意味している。

第2法則 (面積速度一定の法則)： 惑星と太陽とを結ぶ線分が単位時間に描く面積は、一定である。太陽に近いところでは惑星は速度を増し、太陽から遠いところでは速度を落とすことを意味している。これは、面積速度は $(1/2) \times \text{速度 (底辺)} \times \text{腕の長さ (高さ)}$ であり、これは後世の角運動量 (運動量のモーメント) の $1/2$ である。つまり、面積速度一定とは、角運動量保存則を表している。

第3法則 (調和の法則)： 惑星の公転周期の2乗は、軌道の長半径の3乗に比例する。つまり、惑星の公転周期は惑星の質量や軌道の離心率には依存せず、軌道の長半径だけで決まることになる。

ケプラーによる惑星軌道の求め方 コペルニクス説を信じていたケプラーは、ティコの火星の膨大な観察データをもとに火星や地球の軌道を求めようとした。その手順を以下に示す [10]。

(火星の公転周期を求める)

- (1) 地球が太陽のまわりを回る公転周期は 365.25 日 (365.24219 日) であり、また、地球と火星が太陽と一直線に並んで会合 (衝) するのは 780 日 (779.9 日; 2 年と 49.4 日) 周期である。
- (2) Fig.14 で、E, Ma の位置で地球と火星が会合して、1 年後に地球は E' の位置、火星は Ma' の位置、2 年後に地球は E'' の位置、火星は Ma'' の位置へ移動し、780 日後に E''', Ma''' の位置で再び会合する。
- (3) 地球の公転角速度は $360/365.25 = 0.98563 \text{ }^\circ/\text{day}$ であり、二つの会合の間の 780 日間で、地球は $0.98563 \times 780 \text{ }^\circ$ 回転し、火星は $0.98563 \times 780 \text{ }^\circ - 360 \text{ }^\circ = 408.8 \text{ }^\circ$ 回転することになる。

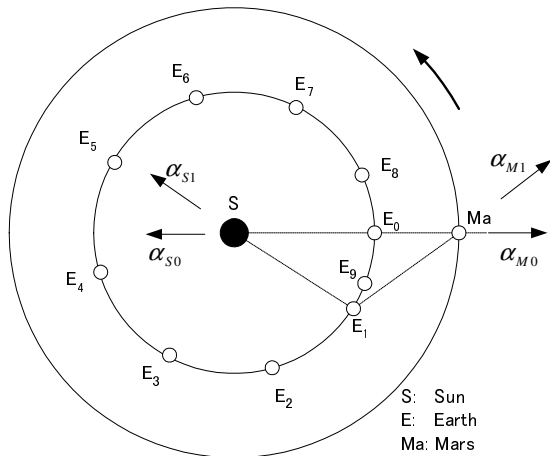


Fig. 15 地球の軌道を求める

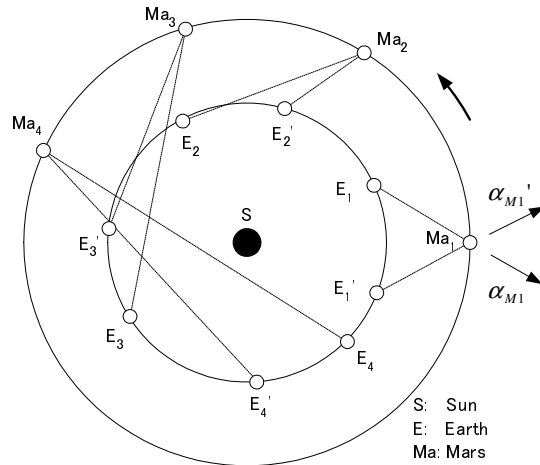


Fig. 16 火星の軌道を求める

- (4) これより火星の公転角速度は $408.8/780 = 0.524^\circ/\text{day}$ となる。つまり、火星の公転周期は $360/0.524 = 687$ 日である。

これより、687日後の火星は宇宙(太陽系)の同じ位置に位置していることになる。地球から見た火星の位置(赤緯-赤経)が異なるのは、地球が別の位置に位置しているためである。逆に見れば、これで地球の位置がわかるとケプラーは考えた。

(地球の軌道を求める)

- (1) Fig.15 で E_0, Ma の位置で地球と火星が会合したとする。火星または太陽の観測値(赤経; より正確には、太陽の軌道を基準にした黄経)から α_{S0}, α_{M0} (\overline{SMa} の方向)が求まる。
- (2) 687日後には火星は再び Ma の位置に戻り、地球は1回まわった後 E_1 の位置に来る。そのときの火星と太陽の観測値から α_{S1}, α_{M1} が求まり、 \overline{SMa} を基準線として、地球の位置 E_1 が定まる。
- (3) 以下同様にして687日後の火星と太陽の観測値を順に拾っていけば、地球の位置 E_2, E_3, E_4, \dots が求まることになる。

(火星の軌道を求める)

- (1) Fig.16 で687日隔てた両日の観測値を考える。このときの地球の位置 E_1, E_1' は計算済みであり、両日の火星の観測値 $(\alpha_{M1}, \alpha'_{M1})$ からそのときの火星の位置 Ma_1 が定まる。
- (2) 687日隔てた両日の組みを少しずつずらしていけば、その時々火星の位置 Ma_2, Ma_3, Ma_4, \dots が求まることになる。

こうして、ケプラーは、火星の軌道は太陽を一つの焦点とした離心率0.09(真の値は0.0934)の楕円であることを知った。

ケプラーは初めは地球の軌道は円と考え、その半径を10cmにとると、円の中心は太陽から1.7mmずれていると結論した。実際の地球の軌道は離心率0.0167の楕円であり、長半径を10cmとすると、短半径は0.0145mm短いだけだから、無理もない。ケプラーは火星の軌道計算の後、地球も楕円に変更して、火星の軌道を計算し直している。

2.2 ガリレオ・ガリレイ

ガリレオ・ガリレイ (Galileo Galilei, 1564-1642) は、イタリアの物理学者、天文学者。

ピサとパドヴァで数学教授を務めたあと、「トスカーナ大公付き首席数学者兼哲学者」として活動した。

天体観測の成果をふまえて地動説の正しさを主張し、宗教裁判にかけられた。また、物体の落下法則と投射体の放物線軌道の発見は、その後の力学ひいては物理学の発展の基盤となった。

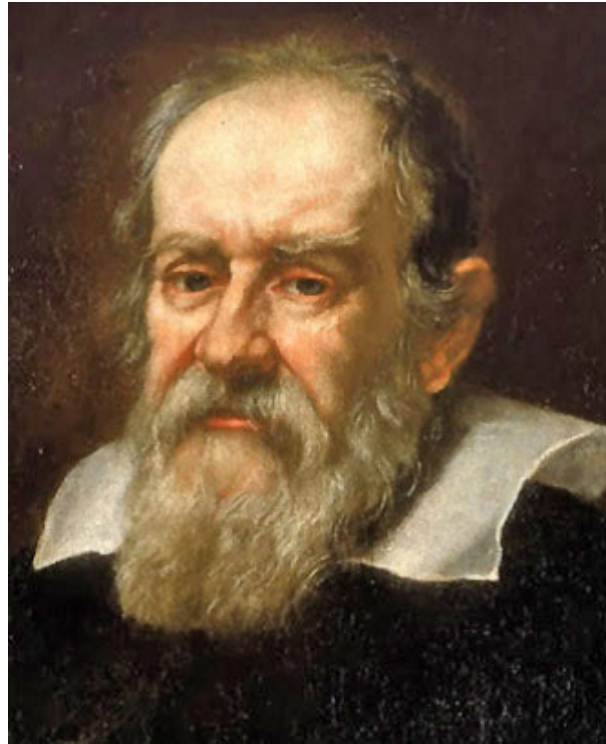


Fig. 17 Galileo Galilei

ガリレオは、当時トスカーナ大公国の一都市だったイタリアの街、ピサで生まれた。父親は音楽家、母親は反物を扱う商家の出だった。ガリレオは長男で、妹二人と弟一人がいた。この弟妹の面倒は後々まで見ることになる。

父親は彼を医者にしようと、ピサ大学に入学させた (1581 年)。ピサ在学中に、トスカーナ宮廷に所属していた数学者 オステリリオ・リッチに知り合い、ユークリッドやアルキメデスを学んで興味を持ち、大学は、学芸学部 (教養課程) に三年半在籍したところで中途退学した。この頃に書かれたとされる『小天秤』や『固体の重心について』はいずれもアルキメデスの著作に基づいていた。ガリレオはそうした成果を何人かの数学者に送ったが、特にトスカーナ大公国築城監督官のグイドバルド・デル・モンテ侯がそれを高く評価した。

1589 年、デル・モンテ侯のバックアップにより、ピサ大学の数学教授となった。1591 年には妹の結婚と父親の死去が重なったが、翌 1592 年ベネツィア共和国のパドヴァ大学で教授の職を得た。大学では数学や天文学の初歩を教えたが、ガリレオはそのほかにも測量や砲術のための計算といった実用的事柄を個人教授という形で教えていた。この時期、ガリレオはヴェネツィアでマリナ・ガンバという女性と出会い、二人は結婚はし

なかったが、マリナはパドヴァで一緒に暮らし、2女1男をもうけた。

パドヴァ時代のガリレオは、物体の落下運動や望遠鏡の製作・天体観測を精力的に行った。1610年には、「トスカーナ大公付き首席哲学者兼数学者」と「ピサ大学特別数学者」という肩書を得て、パドヴァからフィレンツェへと移った。

フィレンツェに戻ってからも天体観測や運動論研究を続け、『太陽黒点とその属性に関する記述と証明』(1613年)『水上にある物体、または水中を動く物体についての論述』(1612年)を出版した。1611年にはローマを訪れ、当地の有力者たちに望遠鏡を見せて自分の主張を説明したりした。

そうしたなか、地動説は聖書に反しているとの主張が唱えられ始め、1615年、ローマの異端審問所はドミニコ修道会士ロリーニの告発を受けて、ガリレオの見解を極秘に審議し始めた。このときの判決は、ガリレオを直ちに咎めるものではなく、彼に好意的だったベラルミーノ枢機卿から注意を受けただけで済んだ。

その後、ガリレオは落体の運動論に精力を注いでいたが、1618年に現れた彗星を契機に天体論争が再燃し、1632年に『天文対話』を出版した。ガリレオはこれをめぐって再度異端審問所に呼び出され、2度の審問と折衝の後、1633年6月22日に有罪判決を受けた。

ガリレオはその後視力を失ったが、1635年に『新科学対話』を出版し、1642年に77歳で死去した[11]。

貢献

望遠鏡の製作： オランダで1608年に望遠鏡が発明されたことを知ると、1609年に自らレンズを磨いて、数ヶ月の間におよそ20倍の倍率のものを作ることに成功した。

月面の観測： 1609年月に望遠鏡を用いて、月面が地球の表面と同様に凹凸(クレーター)があることを発見した。

木星の衛星の発見： 1610年、木星の衛星を3つ発見。その後見つけたもう1つの衛星と併せ、これらの衛星はガリレオ衛星と呼ばれている。これらの衛星の公転周期は、航海用の時計として使うことも提案した。

金星の観測： 金星が満ち欠けする上に、大きさを変えることも発見した。

太陽の黒点の発見： 望遠鏡で太陽黒点を観測した最初の西洋人となった(中国に前例の記録あり)。

落体の運動論： 以下に詳説。

2.3 ガリレオの力学 [12], [13], [14]

ガリレオは、パドヴァの18年間で力学に関する重要な研究を行った。フィレンツェに移ってからは、望遠鏡による天文学の研究を行っていたが、天文学の著書が禁止されてから、再び力学の研究をおこなった。これらの結果は、ガリレオの二つの著書、1632年刊行の『二つの主なる宇宙体系に関する対話』(天文対話)と1638年刊行の『二つの新しい科学に関する対話』(新科学対話)とにまとめられている。そのいずれにおいても、3人の登場人物の対話という形で記述されており、当時の人々が疑問に思うことに逐一いねいに答えようとするガリレオの姿勢が読み取れる。

「天文対話」 前者の「天文対話」は、プトレマイオス体系とコペルニクス体系についての論争を、対話の形で記述したものであるが、その中で慣性の法則に関する問題も扱われている。

ガリレオは慣性の法則(ガリレオの相対性原理)を見出していた。

もし、地球が西から東へ回転するとすると、鉛直上方に投げられた物体はその西側へ落ちる、雲や鳥は東へ飛ぶことは出来ないだろう、銃から撃った弾丸は西へそれる、等の批判がなされていた。ガリレオはこれに対して、地球と共に動く物体は地球の動きをあわせ持っており、物体の速度は力という外部的原因の作用を受けない限り変化しない、と答えている。ガリレオは多くの例を挙げて、繰り返しこのことを説明している。等速直線運動している座標系(慣性座標系)で共通の運動法則が成り立つことは、後世では「ガリレオの相対性原理」とよばれている。

「新科学対話」第3日 ここでは、主に斜面または鉛直面に沿う落下運動を扱っている。

落下する物体の速度の増加: 物体は落下するにつれて速度が増加する。ガリレオは「自然はもっとも簡単な方法ですべてのことをなす」として、当初は、速度は通過した距離に比例して増加すると考えた(1604頃)。その後、速度は経過した時間に比例することに気づいた(1632)。

速度 \propto 通過距離 か? それとも 速度 \propto 経過時間 か?

速度が通過距離に比例すると考えると、次のような矛盾が生じる。

もし、物体が2メートル*²通過するときの速度が1メートルを通過するときの速度の2倍になるのであれば、2メートルを通過するに要する時間(距離2÷速度2)と1メートルを通過するに要する時間(距離1÷速度1)とが同じになる。同一物体が、同じ時間内に1メートル位置と2メートル位置の2箇所を通過していることは、無限に速い速度でない限りあり得ない。

これより、速度が通過距離に比例すると考えるのは誤りである。

*² 原文では4キュービットとなっている。キュービット(英語:cubit, ラテン語:cubitus)は、古代より西洋の各地で使われてきた長さの単位。キュービットは、肘から中指の先までの間の長さ由来する身体尺である。「キュービット」という名称は、ラテン語で「肘」を意味する cubitum に由来する。各地で様々な長さのキュービットが使われていたが、その長さはおおむね43~53cmである。

命題 1(定理 1：平均速度定理 (Mean speed theorem)) 「物体が一様に加速されるときにある距離を進むのに要する時間は，加速運動が始まる直前の速度と最終速度との平均値に等しい一様速度で，その距離を通過するに要する時間に等しい」

「物体が静止状態から一様加速度運動によりある距離を通過するに要する時間は，同じ物体が最終速度の半分の一様速度でその距離を通過するに要する時間に等しい」

このことは，14 世紀の前半，オックスフォード大学のマートン・カレッジに所属していた数学者たちが (思考により) 見出したとされるので，マートン規則 (Merton rule) とも呼ばれている。ガリレオはグラフ表示を用いて説明した。

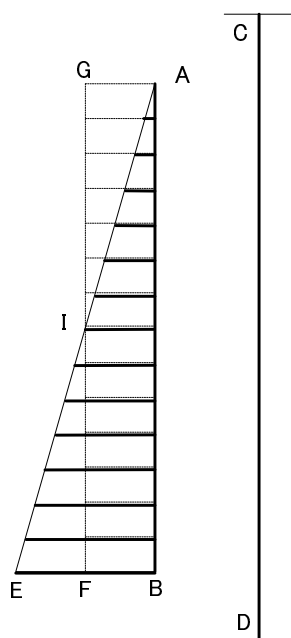


Fig. 18 平均速度定理

物体が静止位置 C から出発して等加速度で落下して位置 D に達するとする。この間の時間を AB で表し，時間 AB 経過後の速度を BE で表す。時間 AB の間の任意の時刻の速度は，その時刻に対応する AB 上の点から直線 AE に至る水平な線分の長さで表される。

ここで，BE の 2 等分点を F をし $BF=AG$ となる点 G を取って長方形 AGFB を作ると，長方形 AGFB の面積は三角形 AEB の面積に等しい。時間 AB 間で線分 BF 長さで表される一様速度で落下するならば，その速度は AB 上の任意の点から直線 GT に至る一定長さの線分で表される。両図形の面積が等しいことから，三角形 AEB に含まれる水平な線分の和は，長方形 AGFB に含まれるものの和に等しい。

したがって，三角形 AEB で表される等加速運動での通過距離は，最終速度の半分の等速運動での通過距離に等しい。

ガリレオは $x \propto t^2$ (または $x = \frac{1}{2}gt^2$) を見出していた。

命題 2(定理 2 : 時間 2 乗則) 「静止から等加速度運動で落下する物体が通過する距離は、時間の 2 乗に比例する」

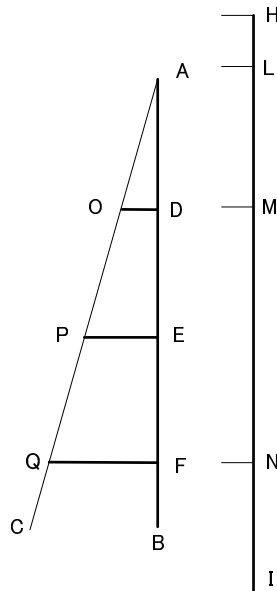


Fig. 19 時間 2 乗則

時刻 A で物体は位置 H で静止状態とし、時刻が D, E, F と経過したとき、物体の位置は L, M, N になったとする。それぞれの時刻での速度は線分 DO, EP, FQ で表される。

このとき、平均速度定理より、

$$HL = \frac{1}{2}DO \times AD$$

$$HM = \frac{1}{2}EP \times AE$$

したがって、

$$HL : HM = DO \times AD : EP \times AE$$

しかるに三角形の相似性より $DO : EP = AD : AE$ であるから

$$HL : HM = DO^2 : EP^2 = AD^2 : AE^2$$

通過距離の比 = (最終速度の比)² = (時間の比)²

となる。

系 1：奇数則 「落下物体が連続した等しい時間に通過する距離は、連続した奇数の比となる。」

時刻 A で静止していた物体が落下して、同じ時間 $AC = CI = IO$ が経過したとする。時刻 C, I, O の速度が CB, IF, OP で表されるように、直線 ABFP を引くことができる。

物体が時間 AC 間で進む距離は、最終速度 BC の半分の EC の速度で同じ AC 時間だけ等速運動したときに進む距離に等しくなるので、四角形 DACE の面積となる。

時刻 C では物体の速度が BC となっているので、そのままの速度を進めば、時間 CI 間に面積 BCIG だけの距離進む。しかし時間 CI 間で物体の速度はさらに FG だけ増加するので、FG の半分の NG の速度で時間 CI 間進めば獲られる距離 JBGN を加えれば、時間 CI 間での通過距離は四角形 JCIN の面積となる。

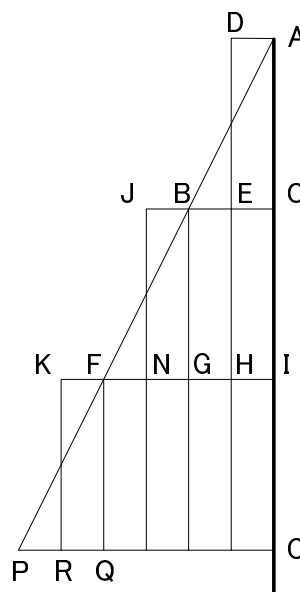


Fig. 20 奇数則

同様に、次の時間間隔 IO 間での通過距離は四角形 KIOR の面積となる。

図より明らかなように、等しい時間間隔 AC, CI, IO の間に落下物体が通過する距離の比は連続する奇数の比^{*3} (1 : 3 : 5) となる。

ガリレオは、これら仮説に基づく推論を入念な実験により検証した。

実験による検証： ガリレオの実験装置は、長さ 5.5 m (12 キュービット)、幅 23 cm、厚さ 6 cm の板の 1 面に、幅 2 cm 余りの真直で平滑な溝を切り、溝の内側に平滑でつるつるした羊皮紙^{*4}を張ったものであった。この板の一端を 0.5 ~ 1 m 引き上げて、溝に沿って硬くて滑らかな真円の真鍮の球を転がす。

落下する斜面の長さを 1, 3/4, 2/3, 1/2, 1/4 等に変えて、それぞれ 100 回以上落下時間を測定した。時間は、水を入れた大きな樽の小さい管から流出する水量を、精密な天秤で計量して測定した。

このような入念な実験の結果、通過距離が時間の 2 乗に比例すること確認した^{*5}。

*3 ガリレオを含めてこの時代、この種の比や数値が重要な特別な意味を持っていると考えられていた。ギリシャのユークリッド、アルキメデスやプラトンなどの考え方の影響のようである。同じ自由落下に対して、レオナルド・ダ・ビンチは連続した整数の比になると言っていた。

*4 羊皮紙(ようひし)は、動物の皮を加工して筆写の材料としたもの。なお紙と付くものの、定義上紙ではない。紙の普及以前にパピルスと同時に使われ、パピルスの入手困難な土地ではパピルスの代わりに羊皮紙やその他の材料を使った。

*5 ピサの斜塔で上から石などを落として確かめたという話は、作り話のようである。ガリレオは、仮説をもとに結果を演繹し、その結果を実験で検証するという現在の仮説演繹法(仮説帰納法)の先駆者である。

系 2 : (比例中項との比) 「斜面に沿って原点から出発した物体が進む二つの距離 SX , SY をとるとき , これらの距離を通過するに要する時間の比は、 SX , SY の 比例中項 SM との比 , つまり , $SX : SM$ または $SM : SY$ となる。」

(SX と SX の比例中項とは現在の幾何平均

$$SM = \sqrt{SX \times SY}$$

のことであり , このとき、 $SX : SM = SM : SY$ となる。)

時間 2 乗則から

$$\begin{aligned} (SX \text{ 落下に要する時間}) : (SY \text{ 落下に要する時間}) \\ = \sqrt{SX} : \sqrt{SY} \end{aligned}$$

これに , $SX \times SY = SM^2$ を用いて , SY または SX を消去すると ,

$$\sqrt{SX} : \sqrt{SY} = \sqrt{SX} : \frac{SM}{\sqrt{SX}} = SX : SM = SM : SY$$

となる。

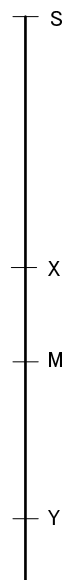


Fig. 21 比例中項

ガリレオは、法則を幾何学的方法で表現した。

命題 3 (定理 3) 「同一の物体が静止状態から出発して、同じ高さの斜面や鉛直面に沿って落下するならば、それらの落下時間の比は斜面の長さの比に等しい。」

$$(\text{落下時間}) \propto (\text{長さ})$$

命題 4 (定理 4) 「長さは同じで傾斜の異なる斜面に沿っての落下時間は、それらの高さの平方根に反比例する。」

$$(\text{落下時間}) \propto \frac{1}{\sqrt{(\text{高さ})}}$$

命題 5 (定理 5) 「種々の長さ、傾斜、高さの斜面に沿っての落下時間は、長さを高さの平方根で割った値の比となる。」^{*6}

$$(\text{落下時間}) \propto \frac{(\text{長さ})}{\sqrt{(\text{高さ})}}$$

^{*6} 高さ h で長さ l の斜面に沿って上端の静止状態から落下する物体を考える。下端での速度は $\sqrt{2gh}$ であるので、落下時間は

$$t = \frac{l}{(1/2)\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{2}{g} \frac{l}{h}}$$

となる。

命題 6 (定理 6 : 鉛直円の弦に沿う落下) 「鉛直円の最高点または最低点から円周と交わる斜面を作るとき, それらの弦に沿う落下時間は相等しい。」

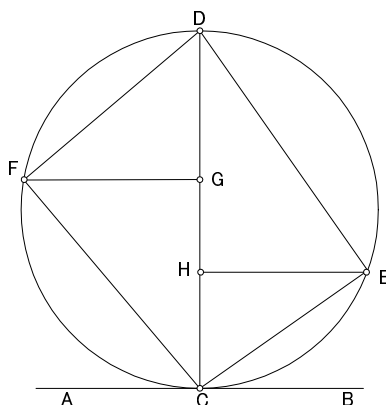


Fig. 22 弦に沿う落下

水平面 AB 上の C で接する鉛直円の頂点を D とする。D から円周上の任意の点 F を結んで斜面 DF を作る。

以下では, 物体が DF に沿って落下する時間が, DC に沿って落下する時間に等しいことを示す。

F から DC に下ろした垂線の足を G とすると, $\triangle DGF \sim \triangle DFC$ *7 であるから,

$$DG : DF = DF : DC$$

となり, DF は DG と DC の比例中項 (幾何平均) である。

さらに, 定理 3 より

$$(DG \text{ の落下時間}) : (DF \text{ の落下時間}) = DG : DF$$

であり, 一方定理 2 系 2 より,

$$(DG \text{ の落下時間}) : (DC \text{ の落下時間}) = DG : (DG \text{ と } DC \text{ の比例中項}) = DG : DF$$

となり, 両者は同じ比であるので,

$$(DF \text{ の落下時間}) = (DC \text{ の落下時間})$$

となる。つまり, 頂点 D から始まる任意の斜面 DF に沿う落下時間は全て相等しく, 直径 DC に沿う落下時間に一致する。

直径 DC の下端 C に至る斜面 EC についても同様にして,

$$HC : EC = EC : DC$$

となり, EC は HC と DC の比例中項であり,

$$(HC \text{ の落下時間}) : (EC \text{ の落下時間}) = HC : EC$$

*7 ~ は相似の意味

となり,

$$(HC \text{ の落下時間}) : (DC \text{ の落下時間}) = HC : (HC \text{ と } DC \text{ の比例中項}) = HC : EC$$

となるので,

$$(EC \text{ の落下時間}) = (DC \text{ の落下時間})$$

となる。

蛇足 幾何学を用いて説明されると難しい(慣れていない)し、物理的な意味が理解しにくい。

ガリレオの時代には自然を数量的に表現する方法は幾何学であった。定理 6 以降、円や三角形を組み合わせた種々の場合について、幾何学を応用した諸定理を導いている。代数学(微積分等)を用いた方法が使える現在では、不要であろうと思われる*⁸。

ガリレオの考え方のもう一つの特徴は、仮説に基づいてそこから得られる論理的な帰結を導き、その帰結を実験により検証するという方法を適用していることである。この仮説演繹法は現代の科学技術の研究でも主要な方法であり、この方法がガリレオの時代に確立したことがわかる。こちらの方法は、大いに学んでほしいことがらである。

*⁸ 定理 6 を代数的に証明すると以下ようになる。

Fig.22 において、 $\overline{DC} = d$, $\overline{DG} = h_1$, $\overline{DF} = l_1$, および $\overline{HC} = h_2$, $\overline{EC} = l_2$ と表す。

斜面 DF および 斜面 EC を落下するに要する時間を、それぞれ t_1 および t_2 とすると、19 ページの脚注より

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l_1^2}{gh_1}}$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2l_2^2}{gh_2}}$$

また、 $\triangle DGF \sim \triangle DFC$ であるから、 $DG/DF = DF/DC$ より、 $h_1/l_1 = l_1/d$ つまり $l_1^2 = h_1d$ である。同様に、 $\triangle CHE \sim \triangle CED$ であるから、 $l_2^2 = h_2d$ である。

したがって、 t_1 および t_2 は、次式となる。

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l_1^2}{gh_1}} = \sqrt{\frac{2d}{g}} = \text{const.}$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2l_2^2}{gh_2}} = \sqrt{\frac{2d}{g}} = \text{const.}$$

共に、直径 DG を落下する時間に等しい。

「新科学対話」第4日 ここでは、主に空中に投げ出した物体の運動(放物運動)を扱っている。

命題1(定理1) 「等速の水平運動と等加速度の鉛直運動の合成により、空中に投げられた物体は放物線の経路を描く。」

命題2(定理2) 「ある物体の運動が水平方向と鉛直方向の等速運動の合成であるとき、この合成運動の運動量の平方はこれを合成する二つの運動量の平方の和に等しい。」

ガリレオは、水平方向の等速運動と鉛直方向の等加速度運動を重ね合わせて、放物運動を表した。

命題3(定理3:落下距離に応じた速度の表示) ある物体が静止位置 A から直線 AB に沿って等加速度運動をするとき、直線 AB 上の任意点 B における速度の求め方を以下に示す。

位置 A で静止していた物体が直線 AB に沿って落下するものとする。単位時間(1秒)後の物体の位置を C とする。CD = 2 AC となる水平線を引くと、CD の長さは C 点の一定速度のまま AC 間の落下時間(1秒間)の間に通過する距離になる。

落下し始めてある時間後に、物体が位置 B に達したとする。BE = 2 AB となる水平線を引くと、BE の長さは B 点の一定速度のまま AB 間の落下時間の間に通過する距離になる。

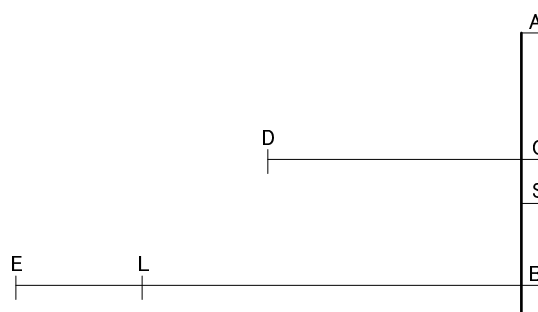


Fig. 23 落下距離に応じた速度の求め方

ここで、AC と AB の比例中項(幾何平均)を AS とすると、系2(比例中項との比)により、

$$\frac{(AB \text{ 間の落下時間})}{(AC \text{ 間の落下時間})} = \frac{AS}{AC}$$

となるので、

$$(AB \text{ 間の落下時間}) = (AC \text{ 間の落下時間}; 1 \text{ 秒}) \times \frac{AS}{AC} = \frac{AS}{AC}$$

となる。したがって、

$$(\text{位置 } B \text{ での速度}) = \frac{BE}{(AB \text{ 間の落下時間})} = BE \times \frac{AC}{AS}$$

となる。BE 上に点 L をとり、

$$\frac{BL}{BE} = \frac{AC}{AS}$$

となるように L を選べば、位置 B での速度は線分 BL の長さで表される*9。

$$(\text{位置 } B \text{ での速度}) = BL$$

*9 位置 B での速度を AC、AB で表すと、

$$(\text{位置 } B \text{ での速度}) = BE \times \frac{AC}{AS} = 2AB \times \frac{AC}{\sqrt{AC \cdot AB}} = 2\sqrt{AC \cdot AB}$$

となる。これは、現代風の解、($\frac{1}{2}mv^2 = mgh$ より) $v = \sqrt{2gh}$ に一致している。

命題 4(問題 1：水平・等速運動と鉛直・等加速度運動の合成)

「与えられた放物線上の任意位置における放物体の運動を求めること。」

ガリレオは、水平方向の等速運動と鉛直方向の等加速度運動の合成により、水平に撃ち出された物体の放物運動を扱った。

Fig.24 に示すように、与えられた放物線 (半放物線) を $BECE'$ とし、頂点 B を通る鉛直線を $BFDF'$ とする。放物線上の点 C と鉛直線上の点 D は同じ高さとし、 $DC = 2 \cdot BD$ となるように C, D を選ぶものとする。

さらに、 $AB = BD$ となるように BD の上方延長線上に点 A をとる。このとき、点 A と点 C を通る直線は放物線の接線となり、その傾きは 1 となっている。 B を通る水平線と接線の交点を I とすると、 $BI = AB$ である。

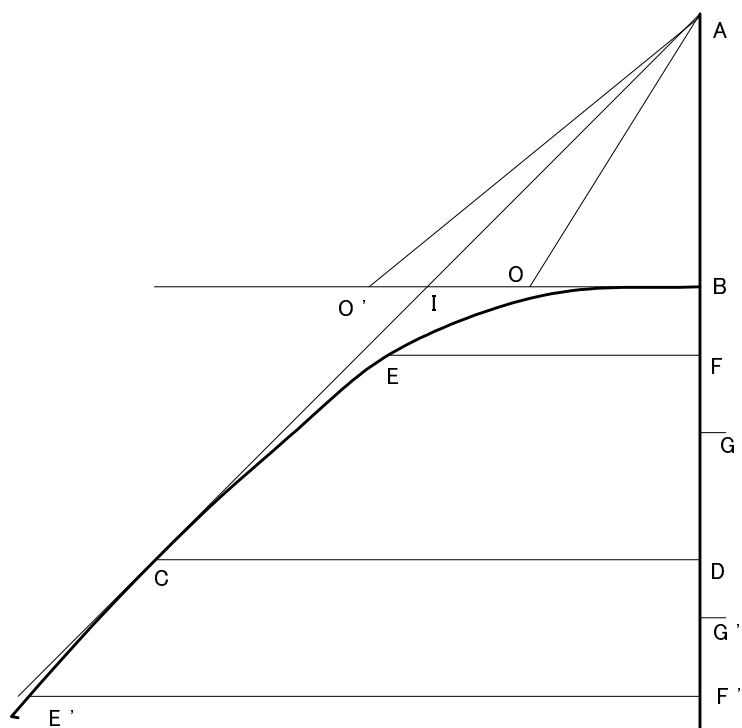


Fig. 24 放物運動

基準とする距離、時間および速度を次のように選ぶ。

- (1) ある物体を A の静止状態から落下させたとき、時間に比例して速度が増加して、ある時間後に物体は B に達する。線分 AB の長さで、通過距離 (L) その間の経過時間 (T) および最終点 B での速度 (V); 速度 V は時間 T の間に距離 $2L$ 進む速度、つまり $V = 2L/T$ の 3 者を表すものとする。
- (2) 物体は B 点でその速度のまま滑らかに方向を変えて、左向き水平に進むものとする。位置 B で水平に撃ち出された物体は、等速度 (V) で水平左向きに進むと共に、鉛直下向きに等加速度で落下する。
- (3) AB 間を落下したのと同じ時間 T が経過すると、物体は水平方向に AB の 2 倍の距離 ($2L$) 進み、鉛直方向に AB と同じ距離 (L) だけ降下するので、与えられた放物線に沿って、位置 C に達する。
- (4) 位置 C での物体の速度は、水平方向に V のままであり、鉛直方向に $BI = AB (= V)$ となるので、速度の大きさは Fig.24 の対角線 AI で表される。

位置 C に達する前の位置 E での時間と速度は、次のように求めることができる。

- (1) 鉛直線 BD 上の E と同じ高さの位置に点 F を取る。

- (2) 水平方向速度は V のままである。
 (3) BD と BF の比例中項 (幾何平均) を BG として, 系 2 を用いて

$$\frac{(BF \text{ の落下時間})}{(BD \text{ の落下時間})} = \frac{BG}{BD}$$

より,

$$(BF \text{ の落下時間}) = (BD \text{ の落下時間}) \times \frac{BG}{BD} = T \times \frac{BG}{BD}$$

となる。

- (4) ある位置での鉛直方向の落下速度はその位置までの落下時間に比例するので,

$$(\text{位置 } F \text{ での落下速度}) = V \times \frac{BG}{BD}$$

- (5) Fig.24 で $BO/BI = BG/BD$ となるように、 BI 上に点 O をとれば、位置 E での鉛直方向の速度は線分 BO で表される。水平・鉛直方向を合わせて、位置 E での速度の大きさは、 AO となる (水平・鉛直方向が入れ替わっていることに注意)。

位置 C に達して以降の位置 E' での時間と速度も同様にして、次のように求まる。

- (1) 鉛直線 BD 上の E と同じ高さの位置に点 F を取る。
 (2) 水平方向速度は V のままである。
 (3) BD と BF' の比例中項 (幾何平均) を BG' として, 系 2 を用いて

$$\frac{(BF' \text{ の落下時間})}{(BD \text{ の落下時間})} = \frac{BG'}{BD}$$

より,

$$(BF' \text{ の落下時間}) = (BD \text{ の落下時間}) \times \frac{BG'}{BD} = T \times \frac{BG'}{BD}$$

となる。

- (4) 落下速度はその位置までの落下時間に比例するので,

$$(\text{位置 } F' \text{ での落下速度}) = V \times \frac{BG'}{BD}$$

- (5) $BO'/BI = BG'/BD$ となるように BI の延長上に点 O' をとれば、位置 E' での鉛直方向の速度は線分 BO' で表される。水平・鉛直方向を合わせて、位置 E' での速度の大きさは、 AO' となる (水平・鉛直方向が入れ替わっている)^{*10}。

定理 … :

問題 … : ガリレオはこの方法を用いて、放物運動の種々の問題を解決するための定理や応用例を多く挙げているが、それらは省略する。

^{*10} 放物線の式 $y = ax^2$ を用いて解析的に位置と速度を求めると、

$$\begin{aligned} (B \text{ 点}): & \quad B(0, 0), & \quad \mathbf{v} \left(\frac{1}{4a}, 0 \right) \\ (C \text{ 点}): & \quad C \left(\frac{1}{2a}, \frac{1}{4a} \right), & \quad \mathbf{v} \left(\frac{1}{4a}, \frac{1}{4a} \right) \\ (E \text{ 点}): & \quad E(x, ax^2), & \quad \mathbf{v} \left(\frac{1}{4a}, \frac{x}{2} \right) \end{aligned}$$

となる。

ケプラーとガリレオの比較 [15], [16]

ガリレオは、落下運動、放物運動で旧来の考え方を打ち破り、その後の近代力学の基礎を築いた。一方天文学では、ガリレオはコペルニクス説を強く支持しており、コペルニクス体系を擁護する論拠として、慣性の原理をもとに、一般の市民に理解できるように解説した。例えば、高いところから落とした物体が西の方へ落ちない理由などを、対話形式でいねいに説明した。

しかし、それ以上の天体の運動について彼の運動論を適用することはなかった。地上の物体と天体と同じ法則が適用できるとは考えていなかった。天体は完全で、円運動をすとの考えにこだわっており、友人のケプラーが楕円運動の法則を発見した後も、惑星の円運動を主張し続けた。

ケプラーは惑星運動の法則を発見し、コペルニクス説に大きな改良を加えた。ケプラーの法則は、太陽中心説について決定的な証明を与えたものではあったが、それは一部の数学者や天文学者に対してであり、一般人に対してではなかった。ケプラーは、ティコの観測結果を秩序づけることに没頭し、三つの法則を発見したが、天体の運動を力学(物理学)として考えようとはしなかった。

ケプラーは慣性の概念を持っておらず、運動している物体には、運動を続けるためには何らかの力が働いていなければならないという古い観念にとらわれていた。彼の見出した正確な惑星の運動を説明するために、ケプラーはウィリアム・ギルバートの磁気説を利用した。太陽が磁気的な発散物を送り出しており、それが磁石である惑星と作用しあって、自転・公転、楕円軌道を行うとした。

この後に続くニュートンが、ガリレオの力学をケプラーの惑星の法則に適用し、地上と天上に共通した力学の法則と万有引力の法則を発見した。

3 ニュートン

3.1 生涯

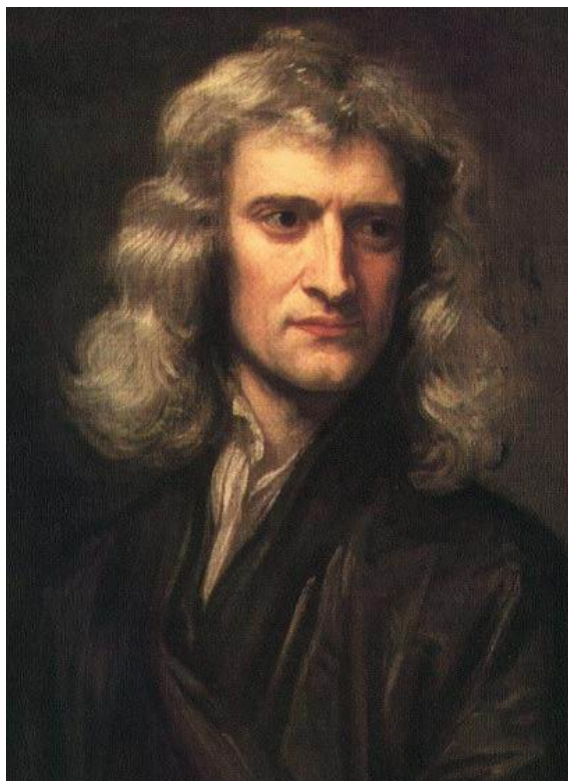


Fig. 25 Isaac Newton

アイザック・ニュートン (Isaac Newton, 1642-1727) は、イングランドの哲学者、物理学者、数学者。神学者。惑星の運動に運動の3法則を適用し、天上と地上は同じ運動法則が成り立つことと、万有引力の法則を発見し、古典力学や近代物理学の祖となった [17]。

ニュートンはイングランドの東海岸のリンカーンシャー州の小都市グランサム近くの小村で生まれた。生まれた時父親はすでに他界しており、実母はアイザックが3歳の時に再婚したため、アイザックは祖母に養育された。

1655年に彼はグランサムのグラマースクールに入学し、下宿先で薬学関係の蔵書に出会い、それに興味を持つようになった。家庭の事情で途中休学したが、その後1661年にケンブリッジ大学トリニティ・カレッジに入学した。ここでニュートンは恩師アイザック・バローに会い、その後多くの便宜を受けた。1665年にカレッジを卒業し、1667年から同大学でフェロー職、1669年にルーカス教授職に就き、1705年に、アン女王からナイトの称号を授けられた。1727年に死去した。

著書に、「無限級数の解析」(1671年刊)、「自然哲学の数学的諸原理 (プリンキピア)」(1687年刊)、「光学」(1704年刊)がある [17]。

3.2 プリンキピアにまつわる逸話

ケプラーは、運動している物体には、その運動を続けるために一定の力がはたらいていなければならないという古い力学の考えに賛成していた。かれの友人ガリレオは、天体の運動は円くて一様であるという古い天文学の観念に固執していた。彼らが発見した惑星の楕円運動と慣性の原理とを比較して考えれば、惑星に働く力について何らかの知見が得られたはずであるが、どちらもそれをしなかった。

少し後のデカルトはガリレオと同じく、惑星は円軌道を描いて一様な速さで動くと信じており、空間を横ぎって物質の塊りの間に何らかの力が働くというような考えを排除していた。デカルトは空間は物質で充たされており、惑星の円軌道は太陽の周りの物質（エーテル）の渦巻の作用によると主張した。デカルトの意見は当時大きな影響力を持っていたので、重力の考えから注意をそらせるのに力があつた。

ケプラーの理論は、1666年にイタリアのアルフォンソ・ボレリ（1608-78）によって復活された。ボレリは、惑星の楕円軌道は、惑星を太陽のほうへ引く引力と、惑星を太陽からそらせる遠心力とのバランスの結果であると考えた。

イギリスでは、のちのステュアート派となる科学者の間で、天体の慣性による直線運動を円または楕円に曲げるために必要な向心力の法則が議論されていた。ロバート・フック（1635-1703）は、重力の法則を実験的に研究しようとして、深い井戸や鉱山の縦孔と地表や高所とで物の重さを比較する実験を試みた。オランダのクリスチアン・ホイヘンス（1629-95）は、振子の運動および円運動一般について実験をおこない、それらの実験から1673年に求心力の法則を導いた。ホイヘンスはこの導出をおこなわなかったが、フックとクリストファー・レン（1632-1723）とエドモンド・ハレー（1656-1742）とがそれをなし、1679年までには逆2乗の法則を得ている。この年にフックはニュートンに手紙を書いて、求心力の逆2乗の法則が与えられているとき、惑星は楕円軌道を描くであろうことを証明し得るか否かをたずねた。この手紙ではフックは、太陽と惑星とは拡がりをもった物体であるが、それらの質量がそれぞれ中心に集っているものとして理論的に取扱わなければならないという困難な点を指摘した。ニュートンはフックの問に答えなかったが、1684年に、レンはフックがニュートンに出した質問の解に対して賞をかけた。このときまでにフックは、この問題を解いたと称したが、ハレーによると、レンはその解に不満であった。

その翌年1685年に、今度はハレーによって同じ問題が再びニュートンに提出された。ニュートンは、太陽の引力を受けている惑星は、楕円軌道を描いて動くという証明をハレーへ送った。ハレーは、その証明を詳細に書いて結果を公表することを、ニュートンにすすめた。ニュートンは、1687年にプリンキピアを出版した。

ニュートンは、1665-66年の大疫病を避けてケンブリッジを去り、グランサムに近いかれの故郷のウールズソープにいたころ、万有引力の法則を発見したとされている。しかし、それをすぐに発表しなかったのは、月の運動に適用すると大きなずれがあつたためであるとか、大きさのある物体の質量を中心に集中して扱うことの可否を証明できなかつたためであるとか言われている。りんごの話は信憑性が薄い[15]。

3.3 ニュートンによる運動の法則 [18]

定義 物質質量，運動量，物質の固有力，外力，向心力，絶対力，加速力，軌道力についての定義と説明。

公理または運動の法則 .

いわゆる「運動の法則」のニュートンによる表現

法則 1： すべて物体は，外力によってその状態を変えられない限り，その静止の状態あるいは直線上の様な運動の状態をそのまま続ける。

これは「慣性の法則」である。法則 1 は下記の法則 2 の特別な場合ではなく，法則 1 による運動と法則 2 による運動とを合成して任意の運動を求めるために必要な，独立した法則である。

法則 2： 運動の変化は及ぼされる起動力に比例し，その力が及ぼされる直線の方角に行われる。

「運動の変化」とは運動の量（運動量）の変化のことであり，これは運動量の変化はいわゆる力積（力と時間の積）に比例するという運動量定理である。

法則 3： 作用に対し反作用は常に逆向きで相等しい，あるいは，2 物体の相互の作用は常に相等しく逆向きである。

系 1： 物体は合力によって，個々の力を辺とする平行四辺形の対角線を同じ時間内に描く。

つまり，運動している物体にある力を作用させたときの運動は，慣性法則による運動（法則 1）と加速度運動による運動（法則 2）をベクトルとして合成すればよい。複数の力の合力による運動は，それぞれの力による運動を合成すればよい。

補助定理 10(系 3 を含む)： 静止していた物体が任意の力の作用により動く距離は，時間の 2 乗に比例する。

Fig.26 において，距離は速度と時間の積であり，運動の始まりでは速度は時間に比例するので，十分短い時間においては，面積 ABD，ACE で表される距離は時間 AD,AE の 2 乗に比例する。

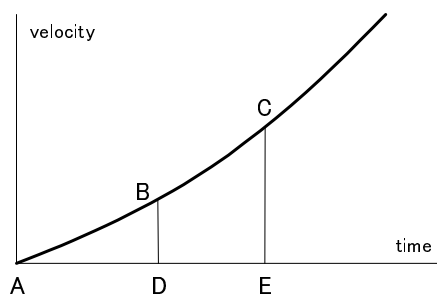


Fig. 26 時間と通過距離

速度（運動量）の増加は力（力積）に比例する（法則 2）ので，運動の始まりでは，距離は時間の 2 乗と力の積に比例する^{*11}。

$$(\text{運動の始まりの通過距離}) \propto (\text{力}) \times (\text{時間})^2$$

^{*11} これは， $x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2$ に合致している。

3.4 向心力を見出すことについて [18], [19]

『プリンキピア』第1編「物体の運動について」では、物体が一点へ向かう力(向心力)の作用を受けるときの運動を扱っている。重要と思われる部分だけを抜粋して示す。第2編「抵抗のある媒質中における物体の運動について」は省略する。

命題1(定理1:面積速度一定則の誘導) 「回転する諸物体が不動の力の中心に引かれた動径によって描くそれぞれの面積は、不動の一平面上にあること、また時間に比例すること。」

向心力を受ける物体は平面上を動き、その動径が描く面積速度は一定である。

(証明)

時間を等間隔 Δt に分けるとし、Fig.27のように、物体はその第1時間区分で線分 \overline{AB} を動いたとする。

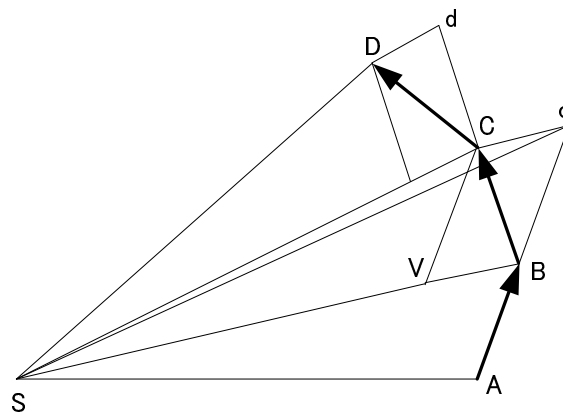


Fig. 27 面積速度一定則

その物体は外部より何の力も受けなければ、第2の時間区分では、法則1に従って線分 $v\Delta t = \overline{Bc}$ を描き、等しい面積 ASB と BSc (\because 底辺 $AB=BC$ と高さが相等しい) を描くであろう。しかし、物体がBで向心力を受けると、物体は \overline{Bc} でなく \overline{BC} の方向へ進む。このとき、 \overline{cC} は \overline{BS} に平行であるので、 BSc と BSc' の面積は等しい (\because 底辺 BS と高さが相等しい)。

したがって、動径の描く三角形 ASB と BSc の面積は等しい^{*12}。

^{*12} 角運動量 (運動量 \times 腕の長さ) は面積速度の2倍であるので、面積速度一定則は角運動量一定則に等しい。

命題 6 系 1(曲線運動と向心力) 「中心 S の周りを周回する物体 P が曲線 APQ を描き、その曲線 P における接線を ZPR とするとき、曲線上の任意の点 Q から SP に平行に接線 ZPR に向かって QR を引き、また Q から SP に垂線 QT を下ろすと、点 Q が P に接近する極限において、向心力は立体積 $\overline{SP}^2 \times \overline{QT}^2 / \overline{QR}$ に反比例する (Fig.28 参照)。」

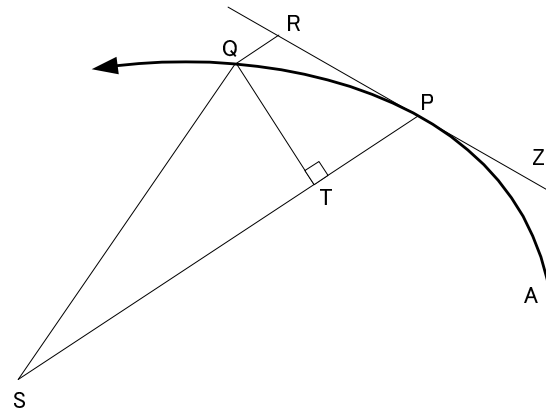


Fig. 28 曲線運動の向心力

(証明) P から Q へ至る運動は、等速直線運動 \overline{PR} と等加速度運動 \overline{QR} の合成となる。

補助定理 10 より $\overline{QR} \propto (\text{向心力}) \times (\Delta t)^2$ であり、また、面積速度一定則より、 $\Delta t \propto \overline{SP} \times \overline{QT}$ である。したがって、

$$(\text{向心力}) \propto \frac{\overline{QR}}{(\Delta t)^2} \propto \frac{\overline{QR}}{\overline{SP}^2 \times \overline{QT}^2} \quad (1)$$

となる。

ここで、 $\lim_{\overline{QT} \rightarrow 0} \overline{QR} / \overline{QT}^2 = K = \text{const.}$ は曲線の曲率である。

上の式 (1) を用いて、軌道曲線の形から向心力の大きさ (その変化) を求めることができる。

(楕円の知識) 現代人は多分知らない(忘れてる)が,ニュートンの時代には常識だったかもしれない楕円の性質の幾つか [20] を紹介する(証明略)。

補助定理 A 楕円上の一点 P に接線を引く。楕円の二つの焦点を S, H とするとき, SP と接線のなす角は HP と接線のなす角に等しい (Fig.29)。

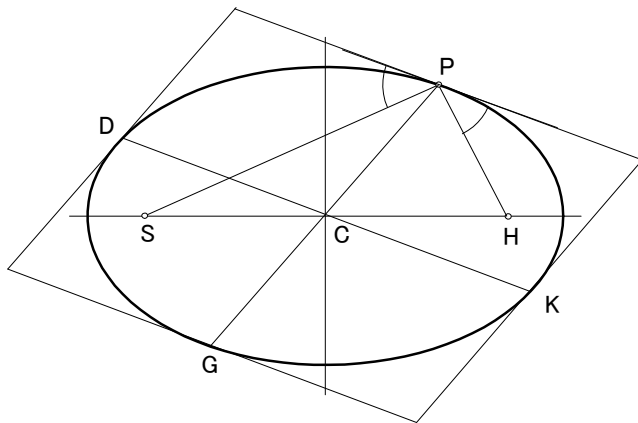


Fig. 29 補助定理 A & B

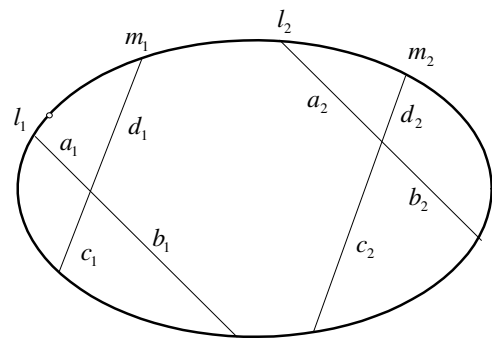


Fig. 30 補助定理 C

補助定理 B 楕円上に点 P をとり, P と楕円の中心 C をとおる径の反対側の点を G とする。PG に平行な楕円の 2 接線の接点を D, K とする。P, D, G, K で接する楕円の外接平行四辺形の面積は, P の選び方によらず一定 ($= 4ab$) である (Fig.29)。

補助定理 C 一つの楕円において, 平行な 2 本の弦の組み l_1, l_2 と m_1, m_2 がある。 l_1, m_1 が交わり, l_2 と m_2 が交わるとする。 l_1 における二分された長さの積と m_1 における二分された長さの積との比は, l_2, m_2 から同様に得られる積の比に等しい (Fig.30)。

$$a_1 b_1 : c_1 d_1 = a_2 b_2 : c_2 d_2$$

命題 11(問題 6：楕円運動の向心力) 「物体が楕円上を周回する。この楕円の焦点に向かう向心力の法則を求めよ。」

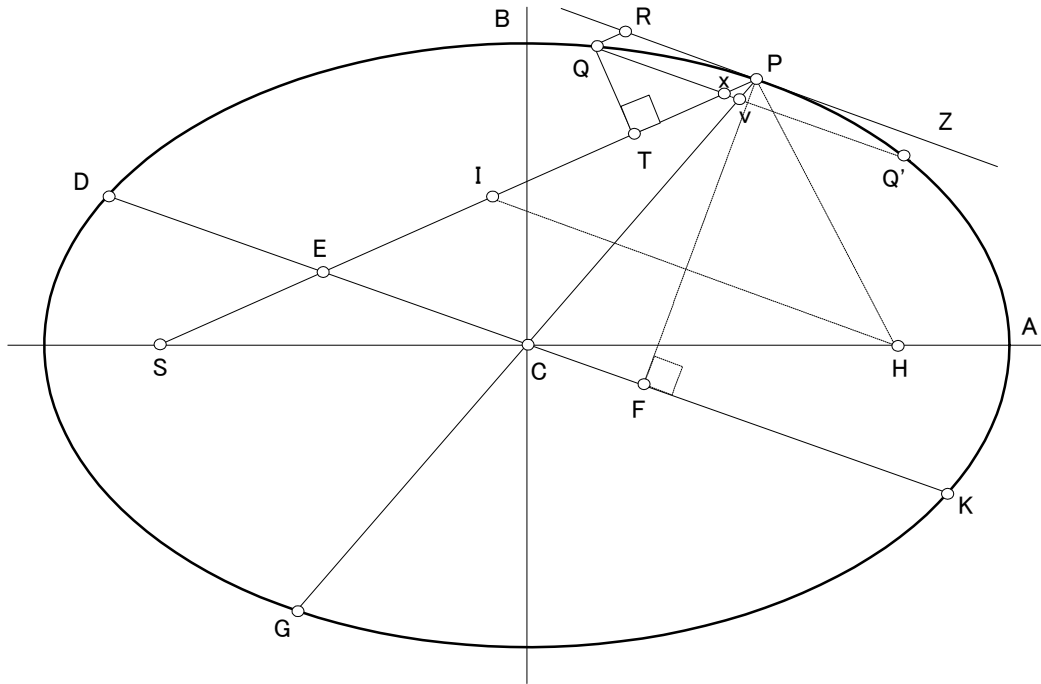


Fig. 31 楕円運動の向心力

(誘導) S,H を焦点とする楕円上の点 P に物体がある。向心力を及ぼす焦点は S である。物体の変位 \overline{PQ} は、接線方向の変位 \overline{PR} と PS 方向の変位 $\overline{QR} = \overline{Px}$ を合成したものである。Q から PS 到下した垂線の足を T とすると、命題 6 より、

$$(\text{向心力}) \propto \frac{\overline{QR}}{\overline{SP}^2 \times \overline{QT}^2} \quad (2)$$

である。 $\Delta t \rightarrow 0$ ($Q \rightarrow P$) のとき \overline{QR} , \overline{QT} は共に 0 に近づくので、 $\overline{QR}/\overline{QT}^2$ の極限值を考える。

PG に共役な直径 (接線 ZPR に平行な直径) を DK とすると、平行弦 DK と QQ' および弦 (直径)PG について補助定理 C より

$$\frac{\overline{Pv} \times \overline{Gv}}{\overline{Qv} \times \overline{Q'v}} = \frac{\overline{PC} \times \overline{GC}}{\overline{DC} \times \overline{KC}} = \frac{\overline{PC}^2}{\overline{DC}^2} \quad (3)$$

また、 $\triangle Pxv$ と $\triangle PEC$ が相似であることから、

$$\frac{\overline{Px}}{\overline{Pv}} = \frac{\overline{PE}}{\overline{PC}}$$

これに (3) の \overline{Pv} を用いて、次の関係を得る。

$$\overline{Px} = \overline{Pv} \times \frac{\overline{PE}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{QvQ'v}^2}{\overline{Gv}} \times \frac{\overline{PC}^2}{\overline{DC}^2} \times \frac{\overline{PE}}{\overline{PC}} = \overline{Qv}^2 \times \frac{\overline{PC} \times \overline{PE}}{\overline{Gv} \times \overline{DC}^2} \quad (4)$$

ここで、焦点 H をとおり接線 ZPR に平行な直線と、直線 PS との交点を I とするとき、補助定理 A より $\overline{IPR} = \overline{HPR}$ 、つまり $\overline{IHP} = \overline{HIP}$ より、 $\triangle PIH$ は二等辺三角形であることから、 $\overline{PI} = \overline{PH}$ である。また、 $\triangle SEC$ と $\triangle SIH$ が相似であることから、 $\overline{SE}/\overline{SI} = \overline{SC}/\overline{SH} = 1/2$ であり、したがって $\overline{SE} = \overline{EI}$ である。楕円の長半径を a とすると、 $2a = \overline{SE} + \overline{EI} + \overline{IP} + \overline{PH} = 2(\overline{EI} + \overline{IP}) = \overline{PE}$ より、

$$\overline{PE} = a = \overline{AC} \quad (5)$$

である。

これを用いると、式 (4) は次式となる。

$$\overline{Px} = \overline{Qv}^2 \times \frac{\overline{PC} \times a}{\overline{Gv} \times \overline{CD}^2} \quad (6)$$

次に \overline{QT} について考える。

$\triangle QTx$ と $\triangle PFE$ が相似であることから、

$$\frac{\overline{QT}}{\overline{Qx}} = \frac{\overline{PF}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{PF}}{a} \quad (7)$$

後半の変形には、式 (4) の関係を用いた。また、補助定理 B より、楕円の長半径、短半径をそれぞれ a, b とすると、

$$\overline{CD} \times \overline{PF} = ab$$

であるので、(7) より次の関係が得られる。

$$\overline{QT} = \overline{Qx} \times \frac{\overline{PF}}{a} = \overline{Qx} \times \frac{b}{\overline{CD}} \quad (8)$$

式 (6) と (8) より、比 $\overline{QR}/\overline{QT}^2$ を求めると、

$$\frac{\overline{QR}}{\overline{QT}^2} = \frac{\overline{Px}}{\overline{QT}^2} = \frac{\overline{Qv}^2}{\overline{Qx}^2} \times \frac{\overline{PC} \times a}{\overline{Gv} \times b^2}$$

$Q \rightarrow P$ の極限では、 $\overline{Qv}/\overline{Qx} \rightarrow 1$ 、 $\overline{Gv} \rightarrow 2\overline{PC}$ となることを考慮すると、

$$\frac{\overline{QR}}{\overline{QT}^2} \rightarrow \frac{a}{2b^2} = \text{const.} \quad (9)$$

となる。したがって、(2) より、 $Q \rightarrow P$ の極限で次の関係が成立する。

$$(\text{向心力}) \propto \frac{\overline{QR}}{\overline{SP}^2 \overline{QT}^2} = \frac{\text{const.}}{\overline{SP}^2} \quad (10)$$

ニュートンは、面積速度一定で楕円軌道を回るには、向心力は焦点からの距離の 2 乗に反比例していなければならないことを導いた。

3.5 楕円軌道上の物体の運動について [18], [19]

命題 14(定理 6: 主通径と面積速度) 「多くの物体が共通の中心の周りに, 中心からの距離の 2 乗に反比例する向心力 (単位質量あたりの向心力) を受けて旋回するとき, それらの軌道の主通径 $L = 2b^2/a$ は面積速度の 2 乗に比例する。」

(証明) ページ 32 の Fig.31 において, 命題 11 の式 (9) より,

$$L = \frac{2b^2}{a} = \frac{\overline{QT}^2}{\overline{QR}}$$

また,

$$\overline{QR} \propto (\text{向心力}) \times (\Delta t)^2 \propto \frac{(\Delta t)^2}{\overline{SP}^2}$$

であることから,

$$L \propto \frac{\overline{QT}^2 \times \overline{SP}^2}{(\Delta t)^2} = [2 \times (\text{面積速度})]^2$$

となる。

面積速度は楕円の大きさ (主通径) の平方根に比例することになる。これは次の周期の誘導につながる。

命題 15(定理 7: 楕円運動の周期) 「前命題と同じ条件で, 各楕円上の周期はその長径の $3/2$ 乗に比例する。」

(証明) 命題 14 より,

$$(\text{面積速度}) \propto \sqrt{L} \propto \frac{b}{\sqrt{a}}$$

したがって, 周期は

$$(\text{周期}) = \frac{(\text{面積})}{(\text{面積速度})} \propto \frac{\pi ab}{b/\sqrt{a}} \propto a^{3/2}$$

となる^{*13}。

ニュートンは, 距離の逆 2 乗則の向心力を受ける惑星の楕円軌道をもとに, ケプラーの第三法則 (「惑星の公転周期の 2 乗は, 軌道の長半径の 3 乗に比例する。」) を導いた。

^{*13} もし, 物体が円運動しているのであれば, 遠心力と向心力のつり合いから,

$$mR \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \propto \frac{m}{R^2}$$

これより, 直ちに

$$T \propto R^{3/2}$$

が得られる。ニュートンはこれを楕円の場合について示したことになる。

命題 16(定理 8: 楕円運動の速度) 「前命題と同じ条件で, 共通の焦点から各軌道の接線に垂線を下ろすと, 各物体の速度は主通径の平方根に比例し, 各垂線の長さに反比例する。」

(証明) 共通の焦点 S から各軌道の接線に下ろした垂線の足を Y とする。起動に沿う速度を V_p とするとき,

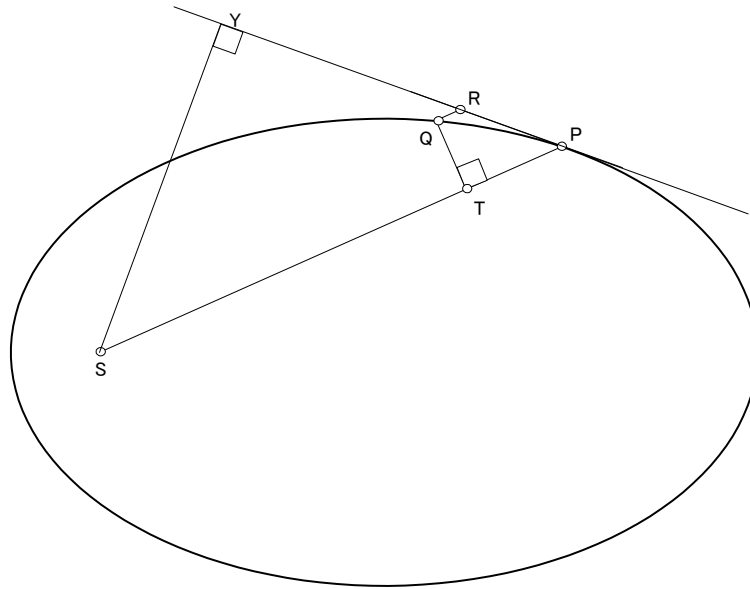


Fig. 32 楕円軌道に沿う速度

(面積速度) = $(1/2)V_p \times \overline{SY}$ であるから, 命題 14 より

$$L \propto (V_p \times \overline{SY})^2$$

したがって,

$$V_p \propto \frac{\sqrt{L}}{\overline{SY}}$$

ニュートンは, 距離の逆 2 乗則の向心力を受ける惑星の楕円運動の速度と軌道形状の関係を導いた。

命題 17(問題 9 : 2 乗法則による軌道計算) 「向心力が各場所の中心からの距離の 2 乗に逆比例し、この力の絶対値は知られているとすると、与えられた位置から与えられた速度でもって、与えられた直線の方角に進む物体が描く曲線を求めよ。」

(解) 初期時刻において、物体が点 P の位置で速度 V_p で PR 方向へ動くとする。物体には点 S へ向かう向心力 $F/m = f = K/\overline{SP}^2$ が作用するとする。ただし、 K は既知である。

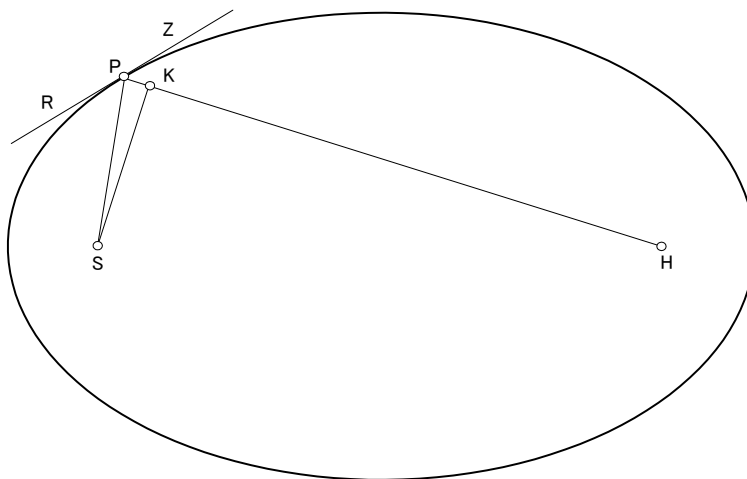


Fig. 33 2 乗法則による軌道計算

主通径 $L = 2b^2/a$ を用いて、命題 16 より

$$L \propto (V_p \times \overline{SY})^2$$

となる。また、物体が半径 r で速度 v の円運動するすると、上の関係は

$$2r \propto (vr)^2$$

と表されるので、両者の比を取って

$$\frac{L}{2r} = \frac{(V_p \times \overline{SY})^2}{(vr)^2}$$

または

$$L = \frac{2}{rv^2}(V_p \times \overline{SY})^2 = \frac{2}{K}(V_p \times \overline{SY})^2 \quad (11)$$

と表される。ただし、円運動の向心力と周速度の関係

$$f = \frac{K}{r^2} = \frac{v^2}{r}$$

より、 $K = rv^2$ となることを用いている。式 (11) より、軌道の主通径 $L = 2b^2/a$ が求まる。

次に、この楕円の未知のもう一方の焦点を H とすると、楕円の性質より、 $\angle HPZ = \angle SPR$ でなければならないので、H の方向が定まる。S から PH に垂線をおろしてその足を K とすると、余弦定理より

$$\overline{SH}^2 = \overline{SP}^2 - 2\overline{SP} \cdot \overline{PK} \cos(\angle SPH) + \overline{PH}^2 = \overline{SP}^2 - 2\overline{SP} \cdot \overline{PK} + \overline{PH}^2$$

また、楕円の性質より、

$$\overline{SH}^2 = (2c)^2 = (2a)^2 - (2b)^2 = (2a)^2 - \frac{2b^2}{a}a = (\overline{SP} + \overline{PH})^2 - L(\overline{SP} + \overline{PH})$$

となるので、両者の \overline{SH}^2 を等置して次式を得る。

$$\overline{PH} = \frac{L \times \overline{SP}}{2(\overline{SP} + \overline{PK}) - L}$$

これより \overline{PH} の長さが求まり、したがって他方の焦点 H が定まる^{*14}。

楕円の焦点間距離は $2c = \overline{SH}$ 、長径は $a = (\overline{SP} + \overline{PH})/2$ 、短径は $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ として求まる。

つまり、

ニュートンは、距離の逆 2 乗則の向心力を受ける惑星の運動が楕円 (、放物線、または双曲線) となる場合について、その楕円軌道 (焦点間距離、長径、短径) の求め方を示した。(惑星の軌道を導いたのではない。)

^{*14} $L >= 2(\overline{SP} + \overline{PK})$ の場合は放物線または双曲線に対応し、ニュートンはそれらも扱っているが、ここでは省略する。

3.6 物体の直線の上昇および降下について

命題 39(問題 27: 任意の向心力を受ける物体の落下)

「任意の種類 of 向心力を仮定し、曲線図形の求積法を認めて、まっすぐに上昇または下降する物体の各場所における速度ならびに物体が任意の場所に達する時間を求めよ。またその逆。」

(解答)

位置 C へ向かう向心力を受ける物体が、任意の場所 A から直線 ADEC に沿って降下するとし、任意位置における向心力の大きさを曲線 BFG (位置 E での向心力は幅 EG) で表すものとする (Fig.34)。位置 E における速度 $v(E)$ は曲線面積 ABGE の平方根に比例する。

$$v(E) \propto \sqrt{(\text{面積 } ABGE)}$$

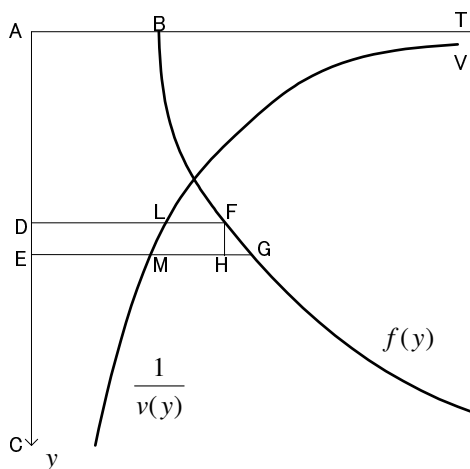


Fig. 34 一直線上の降下

任意位置 E において、面積 ABGE の平方根 (つまり速度 $v(E)$) に逆比例する線分 EM をとることにより、曲線 VLM を引くとする。物体が静止位置 A から落下して直線 AE を描く時間 $t(E)$ は、曲線面積 ATVME に比例する。

$$t(E) \propto (\text{面積 } ATVME)$$

ニュートンは、任意の向心力を受ける物体の任意位置での速度、落下時間を求める図式解法を示した。

(証明)

直線 AE 上に微少な長さ $DE (= \Delta y)$ をとる。解答のように面積 ABGE が速度 $v(E)$ の 2 乗に比例しているならば、

$$(\text{面積 } ABFD) \propto v(D)^2$$

$$(\text{面積 } ABGE) \propto v(E)^2 = \{v(D) + \Delta v\}^2 = v(D)^2 + 2v(D)\Delta v + \Delta v^2$$

より,

$$(\text{面積 } DFGE) \propto 2v(D)\Delta v + \Delta v^2$$

一方, $\overline{DE} = \Delta y = v(D)\Delta t$ であるので,

$$\overline{DF} = \lim_{E \rightarrow D} \frac{(\text{面積 } DFGE)}{\overline{DE}} = \lim_{E \rightarrow D} \frac{2v(D)\Delta v + \Delta v^2}{v(D)\Delta t} = \lim_{E \rightarrow D} \frac{2\Delta v}{\Delta t}$$

したがって, \overline{DF} または \overline{EG} は $\Delta v/\Delta t$ つまり力に比例する量を表している (前半証明終わり) *15。

また, DE を描く時間 Δt は

$$\Delta t = \overline{DE} \cdot \frac{1}{v(D)} \propto \overline{DE} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\text{面積 } ABFD)}} \propto \overline{DE} \cdot \overline{DL}$$

したがって, 物体が A から E に達するまでの時間は

$$t = \sum_{AE} \Delta t \propto \sum_{AE} \overline{DE} \cdot \overline{DL} = (\text{面積 } ATVME)$$

となる (後半証明終わり) *16。

*15 もし、曲線 BFG の面積が v^2 に比例するならば、この曲線は力の大きさに比例することを示している。ニュートンがどのように考えて、これを思いついたのかは分からない。

この前半の証明を現代風に行えば、運動方程式 $f = m \frac{dv}{dt}$ に $dy = v dt$ をかけて積分すると、

$$\int_0^y f dy = \int_0^y m v \frac{dv}{dt} dt = \int_0^y m v dv = \frac{1}{2} m v^2 \quad (\text{エネルギー保存則})$$

つまり、 $v \propto \sqrt{\int_0^y f dy}$ となる。

*16 後半の証明を現代風に表せば、 $dt = \frac{dy}{v}$ を積分して、

$$t = \int_0^y \frac{dy}{v} = (\text{面積 } ATVME)$$

となる。

3.7 任意の向心力による物体の軌道を見出すことについて

命題 40(定理 13：速度と高度)

「物体は任意の向心力に作用されて、任意の仕方で運動し、また別の物体はまっすぐに上昇または下降し、それらの速度がある相等しい高度の場合に等しいとすると、それらの速度はあらゆる相等しい高度において等しいであろう。」

ニュートンは、任意の向心力のもとで物体が運動するとき、速度は高度 (力の中心からの距離) だけに依存することを示した。

(証明)

Fig.35 において、ある物体は AVDEC と降下し、別の物体は V より曲線 VITKk を動くものとする。中心を C とし任意の半径で同心円 DI, EK を描き、半径 IC と弧 EK の交点 N から IT に法線 NT をおろす。2 円周間隔 DE または IN は微小であり、また両物体は D および I で相等しい速度を持つとする。

D および I に作用する力を \overline{DE} および \overline{IN} で表し、 \overline{IN} を \overline{IT} と \overline{TN} に分けたとき、後者は方向を変えるだけで加速に寄与しない。したがって、DE 間および IK 間の速度増加を Δv_D と Δv_I 、その間の経過時間を Δt_D と Δt_I とすると、

$$\frac{\Delta v_D / \Delta t_D}{\Delta v_I / \Delta t_I} = \frac{\overline{DE}}{\overline{IT}}$$

しかるに、所要時間の比は距離の比であり、 $\triangle INT \sim \triangle IKN$ を用いると、

$$\frac{\Delta t_D}{\Delta t_I} = \frac{\overline{DE}}{\overline{IK}} = \frac{\overline{IN}}{\overline{IK}} = \frac{\overline{IT}}{\overline{IN}}$$

両者をかけて

$$\frac{\Delta v_D}{\Delta v_I} = \frac{\overline{DE}}{\overline{IN}} = 1$$

つまり、 Δv_D と Δv_I は等しい。これより、等しい高度では両物体の速度は相等しくなる^{*17}。

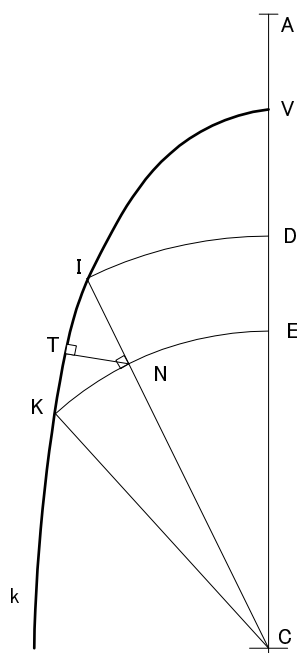


Fig. 35 高度と速度

*17 これは、エネルギー保存則の平面運動版である。

命題 41(問題 28 : 任意の向心力のもとでの軌道曲線) 「任意の種類向心力を仮定し, 曲線図形の求積法を認めて, 物体が運動する軌道曲線ならびに見出された軌道曲線上における運動の時間を求めよ」

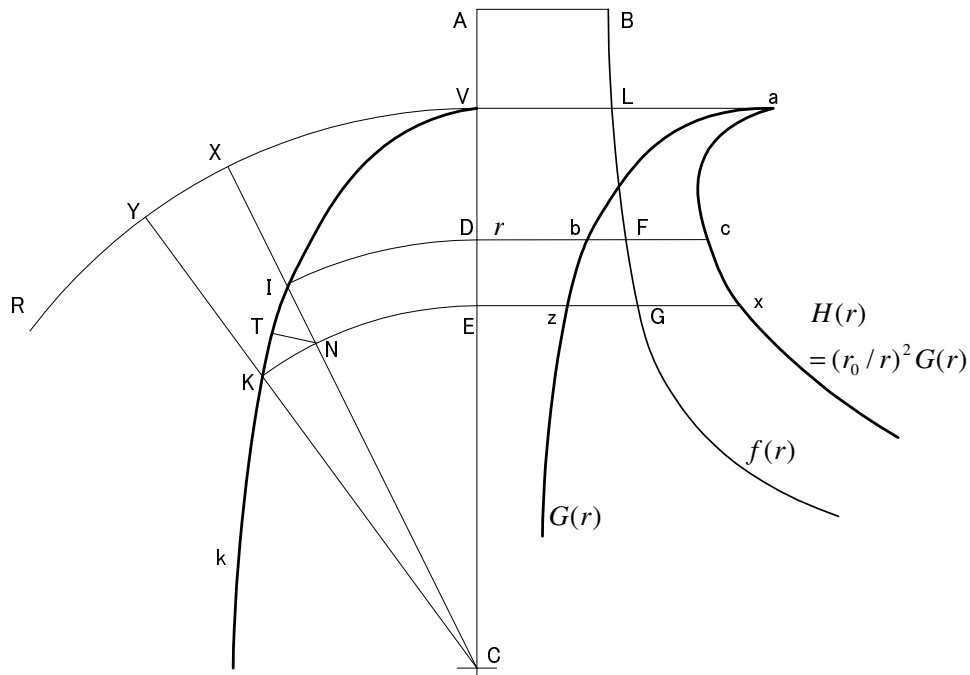


Fig. 36 軌道曲線の求め方

ニュートンは, 任意の向心力のもとで運動する物体の軌道曲線, 経過時間を求める図式解法を示した。

(解答) 任意の力が中心 C に向かうとし, 求める曲線を VIKk とする。点 A で静止していた物体が落下すると, V での速度が放物体の初速度 v_0 となるように A を定める。C を中心として V を通る円 VR, および接近した点 D, E を通る 2 円 DI, EK を描き, 半径 CX と円弧 EK の交点を N とする。

Δt 間における物体の通過距離 \overline{IK} は, 命題 40 にしたがって鉛直落下時の速度 $v(r)$ を用いて, 次式となる。

$$\overline{IK} = v(I)\Delta t = v(r)\Delta t \quad (12)$$

また, 面積速度定理

$$h = \frac{ICK}{\Delta t} = \frac{\overline{IC} \times \overline{NK}}{2\Delta t} = \text{const.}$$

より,

$$\overline{NK} = \frac{2h}{\overline{IC}}\Delta t = \frac{2h}{r}\Delta t \quad (13)$$

となる。

式 (12), (13) より,

$$\frac{\overline{IK}}{\overline{NK}} = \frac{v(r)}{2h/r}$$

一方, \overline{IKN} が直角三角形であることより $\overline{IN}^2 = \overline{IK}^2 - \overline{NK}^2$ であるから,

$$\frac{\overline{IN}}{\overline{NK}} = \frac{\sqrt{\overline{IK}^2 - \overline{NK}^2}}{\overline{NK}} = \frac{\sqrt{v(r)^2 - (2h/r)^2}}{2h/r}$$

となり,

$$r \times \overline{NK} = \frac{2h}{\sqrt{v(r)^2 - (2h/r)^2}} \times \overline{IN} \quad (14)$$

これを式 (13) に用いて, $\overline{IN} = -\Delta r$ と置き直すと,

$$\Delta ICK = h\Delta t = \frac{1}{2} \times r \times \overline{NK} = \frac{h}{\sqrt{v(r)^2 - (2h/r)^2}} \times \overline{IN} = -G(r)\Delta r \quad (15)$$

ただし,

$$G(r) = \frac{h}{\sqrt{v(r)^2 - (2h/r)^2}} \quad (16)$$

と置いた。

また, 三角形 XCY と NCK の面積比より,

$$\frac{\overline{CX} \times \overline{XY}}{r \times \overline{NK}} = \frac{r_0^2}{r^2}$$

つまり,

$$\Delta XCY = \frac{1}{2} \overline{CX} \times \overline{XY} = \frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \times r \times \overline{NK} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \times \frac{h \times \overline{IN}}{\sqrt{v(r)^2 - (2h/r)^2}} = -\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 G(r)\Delta r \quad (17)$$

ここで, 直線 AV に垂線 Va を立て, また, Va に平行に $\overline{Db} = G(r)$ と $\overline{Dc} = H(r) = (r_0/r)^2 G(r)$ となる点 b と c をとり, 曲線 abz と acx を描く。

このとき,

$$\text{面積 } DbzE = \Delta ICK = h\Delta t$$

$$\text{面積 } DcxE = \Delta XCY$$

となり, 任意の位置 y に対して,

$$\text{面積 } VabD = \Delta VCI = ht \quad (18)$$

$$\text{面積 } VacD = \Delta VCX = \frac{1}{2} r_0^2 \theta \quad (19)$$

となる。これより, 任意の時刻 t において, 式 (18) より位置 r が求まり, 式 (19) より 角度 $\angle VCI = \theta$ が求まり, 位置 I も求まる^{*18}。

^{*18} 以上の軌跡の誘導に際して, 運動方程式は現れない。運動方程式は, (半径方向の) 自由落下の関係式 (12) と (周方向の) 面積速度定理 (13) のなかに隠されている。ニュートンは, この両者の関係を用いて幾何学的関係より軌道を求めていることになる。

4 まとめ

コペルニクスによる天動説から、ケプラーによる惑星運動の法則、ガリレオの運動論からニュートンによる重力の法則と運動法則の発見にいたる一連の流れを説明した。

このなかで力学を主とした物理現象を扱うには数学の役割が大きいことが見えてきたが、彼らがもとにした数学は古代ギリシャに端を発する難解な幾何学であり、それを身につけた上で、問題ごとに非凡な閃きと工夫が必要であった。

ニュートンはケプラーの法則をもとに距離の2乗に反比例する万有引力の法則を導いた。しかし、逆に力と運動法則をもとにして、物体の軌道を求めることは、不完全にしか行えていない。一方で、ニュートンは微積分を発明したとされ、彼の著書の中には、それらしき説明(極限操作)もあるが、現代の微分方程式、運動方程式に相当するものは見当たらない。

ニュートン力学(古典力学)が現代のような形になるのは、その後100年以上の試行錯誤が必要であったようである。次回は、この辺のフォローを予定する。

参考文献

- [1] Web Page, "<http://ja.wikipedia.org/wiki/天動説>", (2014.02.09).
- [2] Web Page, "<http://mathpages.com/home/kmath639/kmath639.htm>", (2014.02.12).
- [3] Web Page, "<http://eco.mtk.nao.ac.jp/koyomi/wiki/B6E1C6FCC5C0A4CEB0DCC6B0.html>", (2017.06.28).
- [4] Web Page, "http://en.wikipedia.org/wiki/Deferent_and_epicycle", (2014.02.11).
- [5] Web Page, "<http://ja.wikipedia.org/wiki/アルマゲスト>", (2014.02.14).
- [6] Web Page, "<http://ja.wikipedia.org/wiki/コペルニクス>", (2014.02.14).
- [7] Web Page, "<http://ariga-kagakushi.info/portrait/Copernicus.html>", (2014.02.17).
- [8] Web Page, "<http://ja.wikipedia.org/wiki/地動説>", (2014.02.17).
- [9] Web Page, "<http://ja.wikipedia.org/wiki/ケプラー>", (2014.02.14).
- [10] 古在由秀, "天文学講話", 丸善ライブラリー (1997).
- [11] Web Page, "<http://ja.wikipedia.org/wiki/ガリレオ・ガリレイ>", (2014.02.15).
- [12] ガリレオ・ガリレイ, 今野武雄・日田節次訳, "新科学対話(上)", 岩波書店 (1937).
- [13] ガリレオ・ガリレイ, 今野武雄・日田節次訳, "新科学対話(下)", 岩波書店 (1948).
- [14] 伊藤和行, "落下法則(古典力学の誕生と数学)",
Web Page, "www.hmn.bun.kyoto-u.ac.jp/report/2-pdf/2_tetsugaku1/2_04.pdf", (2014.02.21).
- [15] S. F. メイスン(矢島祐利訳), "科学の歴史 上", 岩波書店 (1955).
- [16] R.J. フォーブス, E.J. デイクステルホイス(広重徹他訳), "科学と技術の歴史", みすず書房 (1963).
- [17] Web Page, "<http://ja.wikipedia.org/wiki/アイザック・ニュートン>", (2014.03.11).
- [18] ニュートン(河辺六男他訳), "自然哲学の数学的諸原理(第3版)"(世界の名著"ニュートン"収録), 中央公論社 (1979).
- [19] 山本義隆, "古典力学の形成(ニュートンからラグランジュへ)", 日本評論社 (1997).
- [20] Web Page(松本眞), "<http://www.mathsci.hiroshima-u.ac.jp/m-mat/NON-EXPERTS/>

SHIMINKOUEEN1999/SUGAKUKAI/res5.pdf" , (2014.02.14).