２．惑星の動きと運動の法則の発見
(特別講義:科学技術史)

S. Yamauchi

2017 年 9 月 13 日

1

ニュートン力学の成立に至る有名な話

	古代ギリシャ	天体の知識	BC 4c 〜 AD 2c
16c	コペルニクス	地動説	コペルニクス的転回
16c	ティコ・ブラーエ	惑星の運行観測	精密な測定記録
16〜17c	ケプラー	ケプラーの法則	惑星の軌道、周期
	ガリレオ	慣性法則、落体運動	
17c	ニュートン	万有引力の法則 運動の法則	『自然哲学の数学的原理』

Question:

(1) ニュートンは何をして、何をしなかったのか？

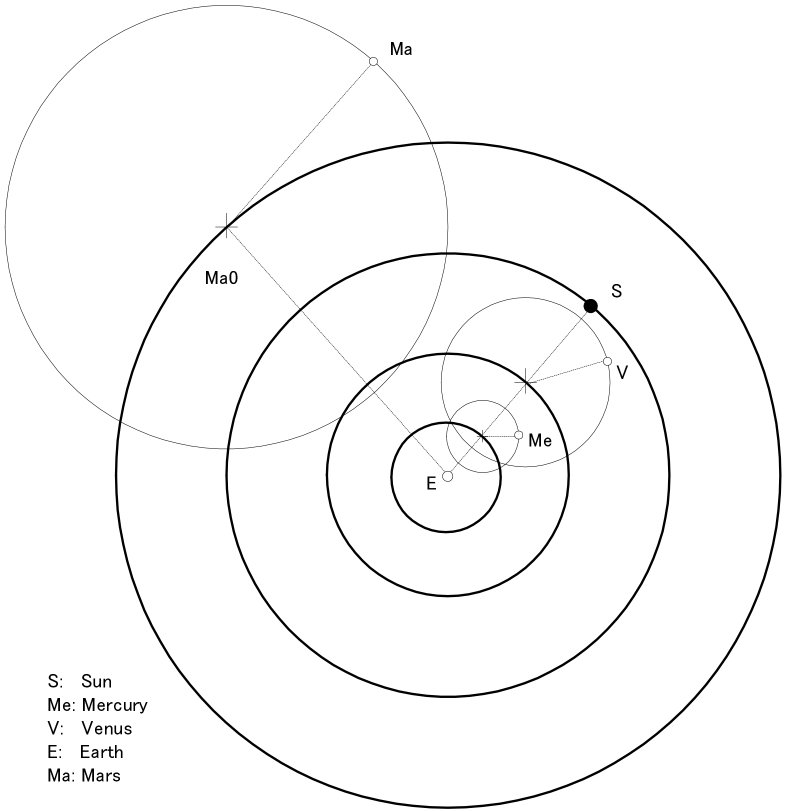
(2) 運動の 3 法則は誰が「発見」したのか？

古代ギリシャのエウドクソスの同心天球 (BC 4 世紀)

地球を中心とした球が重なって回転

中心	地球	静止
	太陽球	表面に 1 個の太陽 恒星球に対し西から東へ、約 1 年周期 恒星球に対し回転軸傾斜 → 季節により高度変化
	惑星球	複数の球の各表面に 1 個の惑星 恒星球に対し回転軸は各々少し相違 → 天球上を各々の速さで西から東へ、 → 回転速さを変えて、時々逆行
最外層	恒星球 (天球)	表面に多数の恒星 天の軸を中心に東から西へ、約 1 日周期

アポロニウスの宇宙 (ギリシャ；BC 262 頃 - BC 190 頃)



従円：地球を中心とした円

周転円：従円を中心とした小さい円

太陽 → ある従円上を動く

惑星 → 各々の周転円上を動く

内惑星 (水星 金星) の周転円中心は
→ 地球と太陽を結ぶ線上

外惑星 (火星) の周転円の中心は
→ 太陽 (従円) より遅く回転。

天球に対して、**すべて西から東へ** (北から見て半時計回りに) 回転。

「コペルニクス的視点」

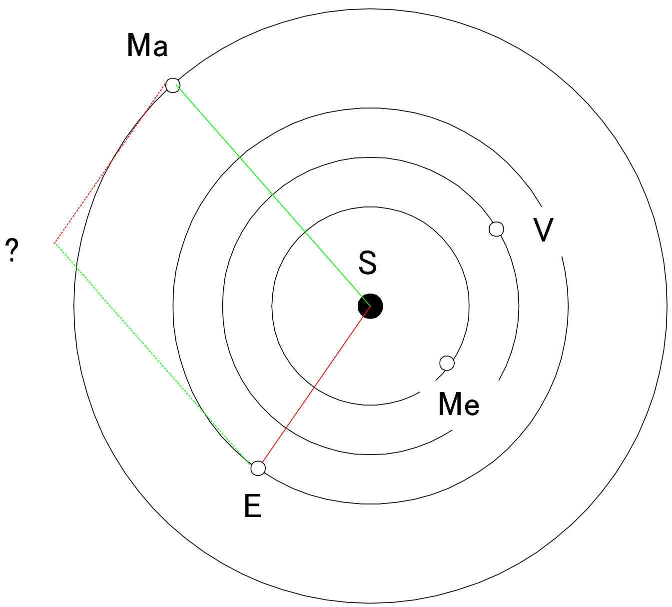
惑星は太陽中心の円運動とすると、地球からどう見えるか？

(1) 地球-太陽間距離 $\overline{ES}$

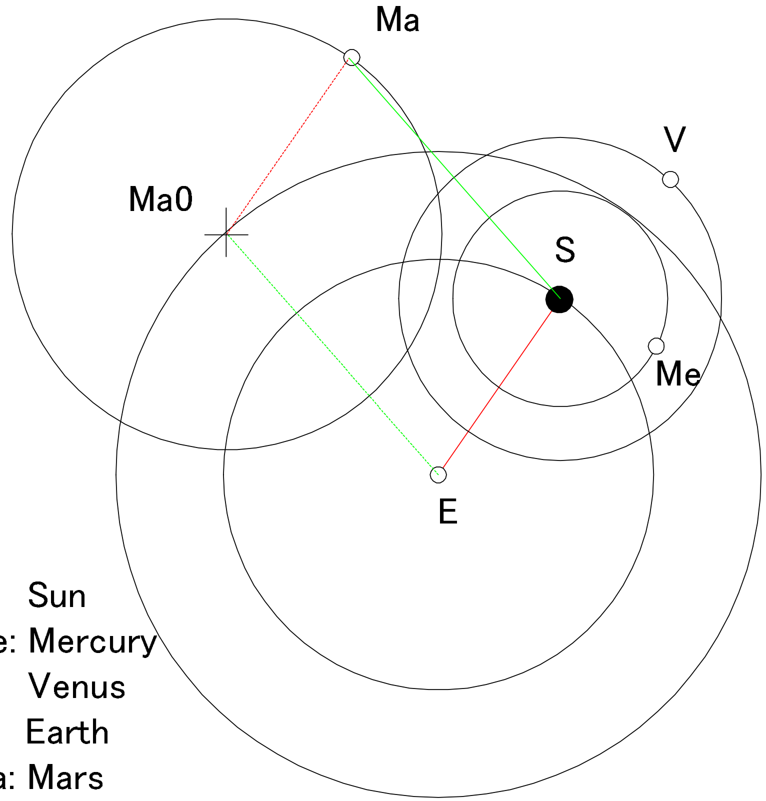
(2) 地球・太陽と惑星を $\overline{ES}$ 方向へ平行移動

(3) 内惑星を地球側へ少し移動

$\longrightarrow$ アポロニウスに一致



周転円半径も $\overline{ES}$

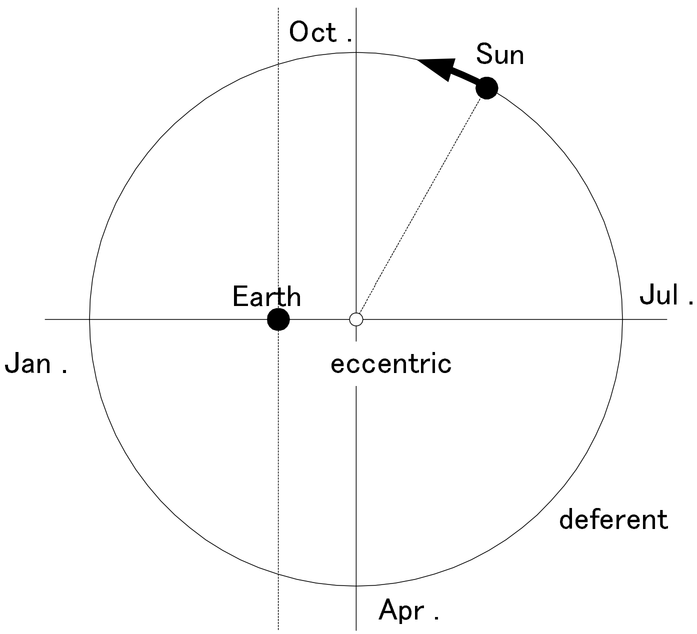


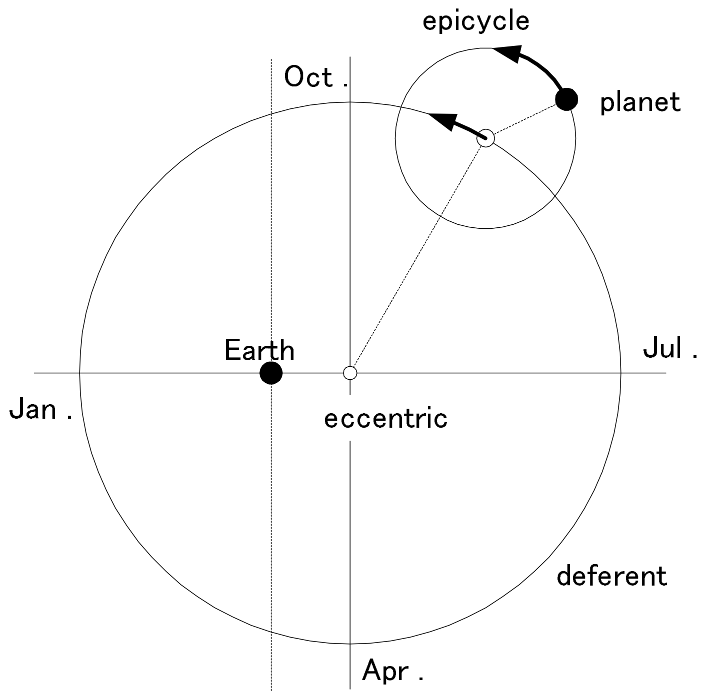
S: Sun
Me: Mercury
V: Venus
E: Earth
Ma: Mars

ヒッパルコスの宇宙 (ギリシャ；BC190 頃-BC125 頃)

(春分〜夏至〜秋分) の期間 $\underbrace{>}_{7\sim8\text{ 日}}$ (秋分〜冬至〜春分) の期間

← 紀元前のギリシャ人は 知っていた！





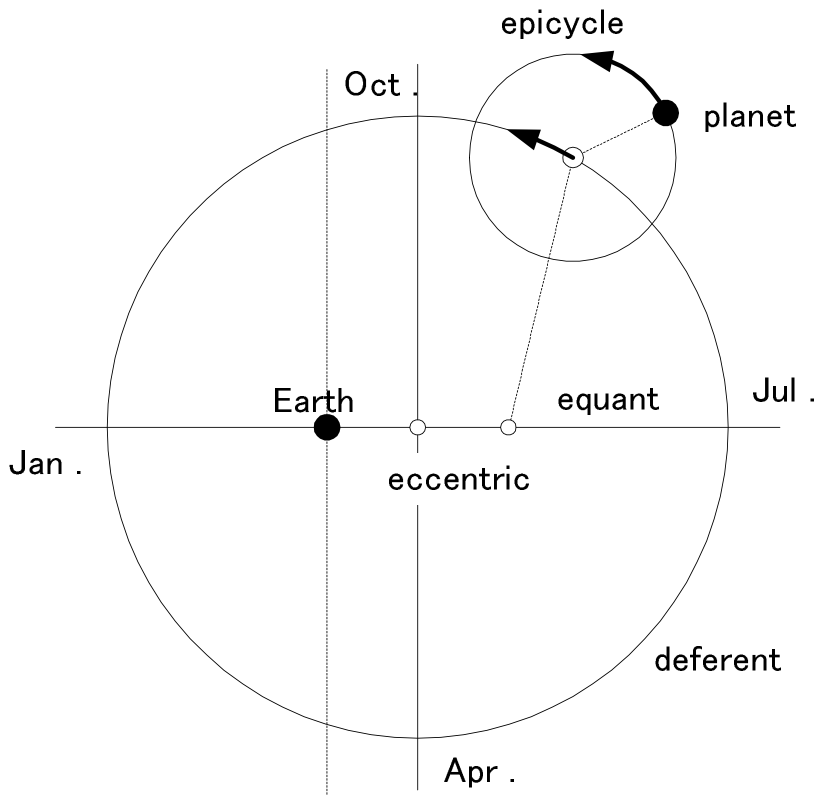
天球上の軌道 (従円) の中心 (離心) は、地球からずれている (離心円)。
太陽は離心の回りを等角速度で回る → 太陽は冬の方が速く回る。

ヒッパルコスの計算では、地球・離心間距離は半径の 1/24 (太陽の場合)

プトレマイオス (アレキサンドリア；83 年頃 - 168 年頃)

天文学集大成『数学的総合』全 13 巻
　アラビア語訳「最大の書」(アルマゲスト)
1 巻：アリストテレスの宇宙論の概要
2 巻：天体の日周運動に関連する問題
3 巻：太陽の運動
4、5 巻：月の運動、視差、太陽と月の距離
6 巻：日食、月食
7、8 巻：恒星の運動、分点の歳差、星表
9 巻：惑星のモデル構築の一般的問題
10 巻：金星・火星の運動
11 巻：木星・土星の運動
12 巻：留と逆行
13 巻：黄緯方向の運動 (黄道から惑星のずれ)

プトレマイオスの宇宙



観測結果によりモデルを修正

地球の対称位置：エカント

エカントから見た角速度一定で

太陽および周転円中心が動く

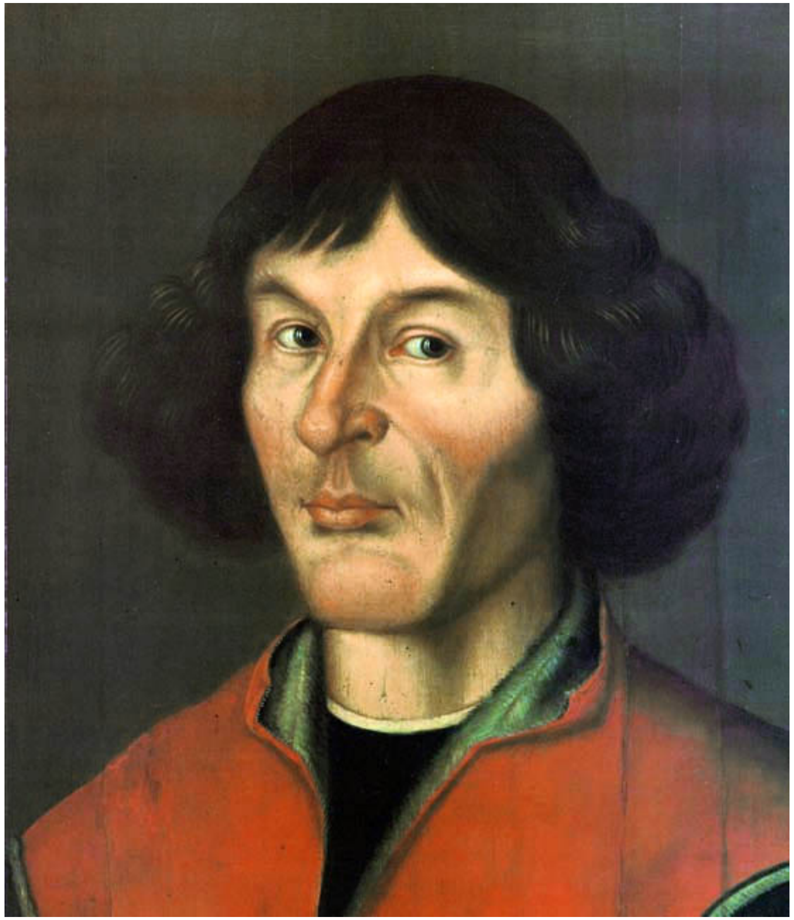
太陽等の動きの冬夏差は、
ヒッパルコスモデルより大。

月，水，金，太陽，火，木，土星の順に、
離心円 (従円) の径が大きくなる。

アルマゲストは、中世イスラムを経てヨーロッパへ再伝来。

プトレマイオス体系は観測結果によく合致。1500 年にわたって高い権威。

ニコラウス・コペルニクス (**ポーランド**; 1473-1543)

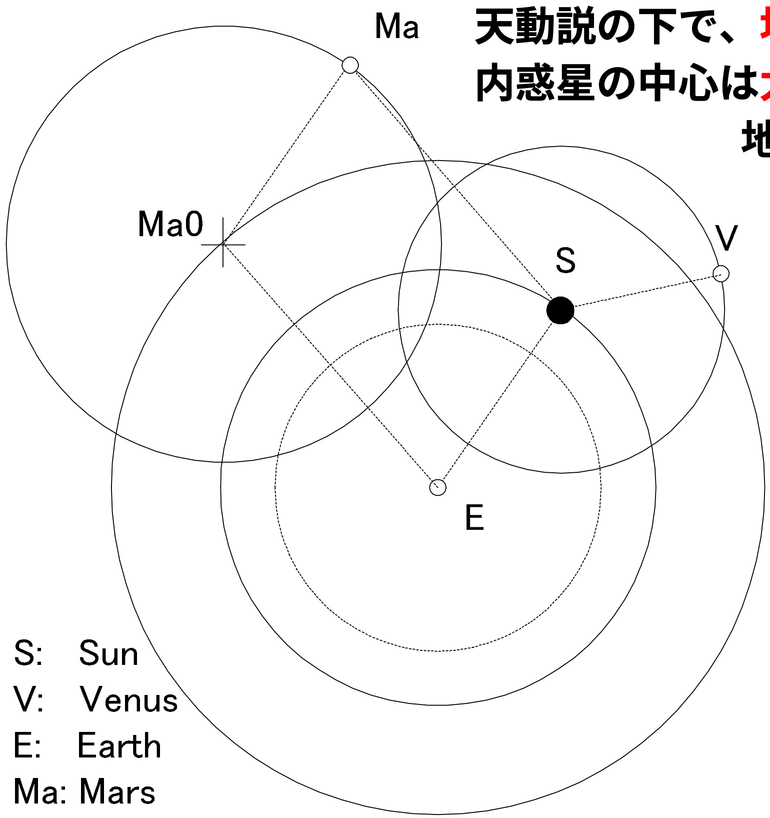


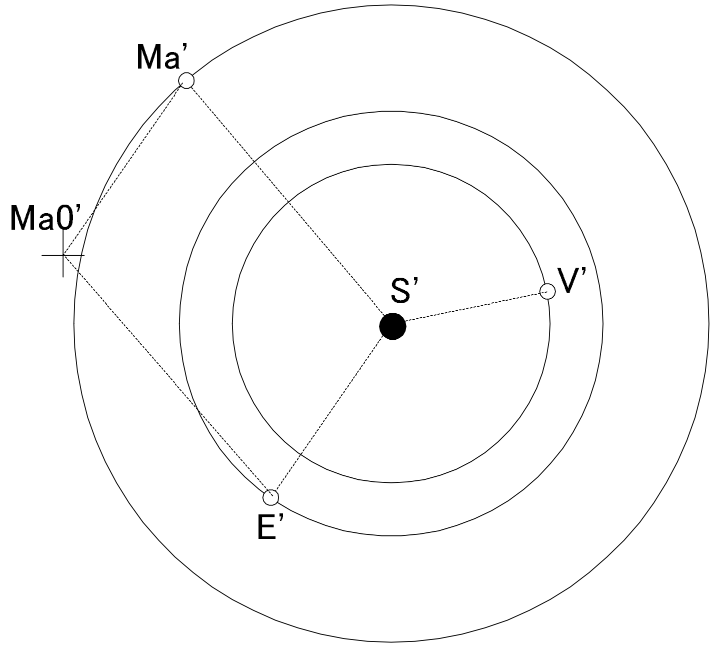
教会司祭の伯父のもとで生育。首都の大学で数学・天文学を学ぶ。教会の職に 4 年就いた後、イタリアのボローニャ大学、パドヴァ大学で法律や医学を学ぶ。**ドメニコ・マリア・ノヴァーラ**の強い影響を受ける。

30 歳で帰国後、司祭・行政官の仕事の傍ら天文観測を続け、地動説の冊子を友人たちに配布。死の直前に書籍**『天体の回転について』**を出版。

コペルニクスの考え

天動説の下で、地球・惑星間距離を調整すると、左図
内惑星の中心は太陽、外惑星の周転円半径は地球・太陽間距離
地球、太陽、各惑星を平行移動して、右図。





天動説のように見える理由 ← 地動説

(周転円軌道上を動く惑星)　(太陽中心の宇宙体系)

コペルニクスの限界

地球中心の複雑な運動 $\longrightarrow$ 太陽中心の単純な運動 (太陽中心の宇宙体系)

「天の運動は、完全なもの (円または球) でなければならない」

(ギリシャ以来の伝統的な考え方)

プトレマイオスと同等な惑星運動 $\longrightarrow$

離心円と小周転円 (二重周転円、エカントに相当) を用いざるを得ない。

$\longleftarrow$ 実際の予測では、プトレマイオスを超えられない。

ティコ・ブラーエ (デンマーク;1546-1601)

貴族の家に生まれ、伯父の養子。

少年期より天体に興味。

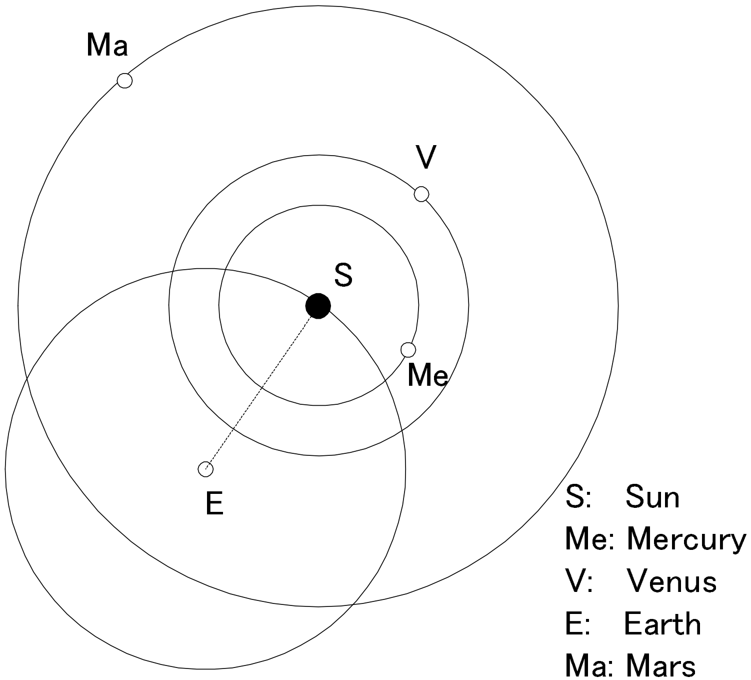
ドイツのライプチッヒ大学、ロストック大学で学び、占星術師となる。

デンマーク王の支援で、ヴェン島にウラニボリ (天の城) 天文台、ステルネボリ (星の城) 天文台を建設

大量かつ精密な観測記録を残す。

後年、プラハへ移り、2 年後病死。

ティコ・ブラーエの宇宙像



地球動けば見えるはずの**年周視差**が

観測できない → 地球は動いていない。

「修正天動説」：

太陽は地球のまわりを公転し、

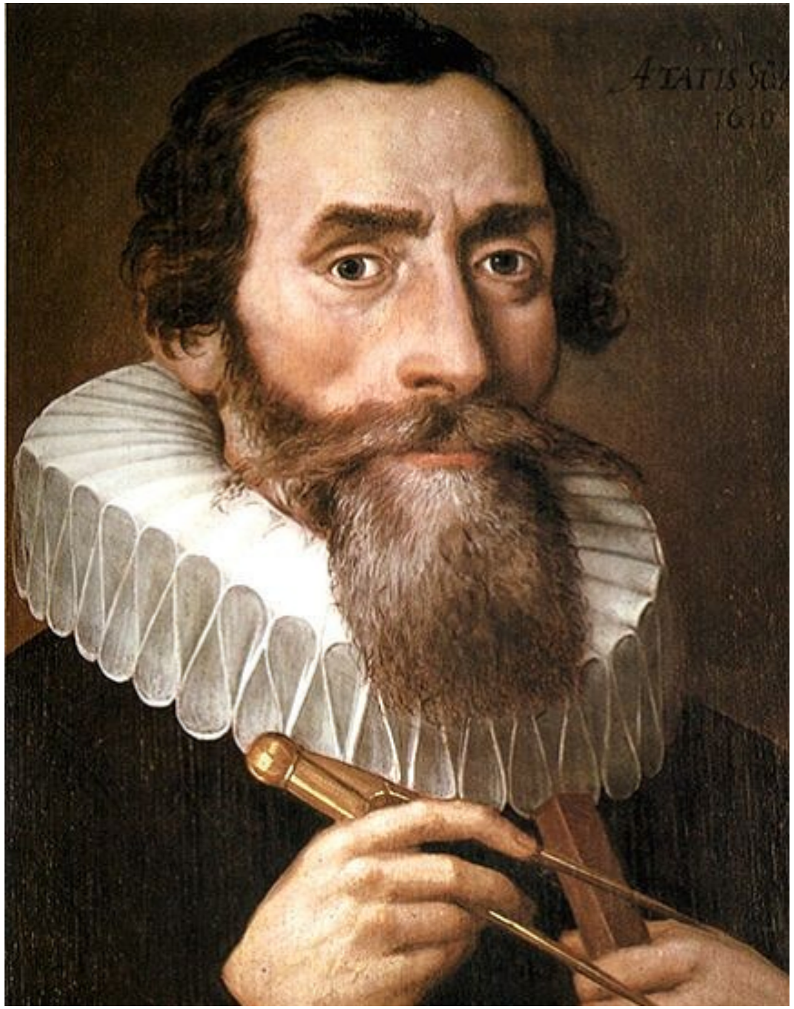
その太陽のまわりを惑星が公転。

ティコの最大の功績：

肉眼による天体観測としては**最高精度の惑星運動の記録**を残したこと

⟶ **ケプラーの法則**へ繋がった。

ヨハネス・ケプラー (ドイツ; 1571-1630)



南西ドイツ (神聖ローマ帝国) で生まれ、大学等で神学のほかに数学と天文学を学ぶ。1594 年、グラーツ神学校の数学教師、占星術師になるも、プロテスタントゆえに職を追われ、ティコ・ブラーエの誘いで 1600 年にプラハへ移る。翌年ティコが死去し、後任の宮廷付数学 (占星術) 官となる。ティコの火星の観測記録を用いて 1609 年に第一・第二法則を、19 年に第三法則を見つけた。

ケプラーの法則

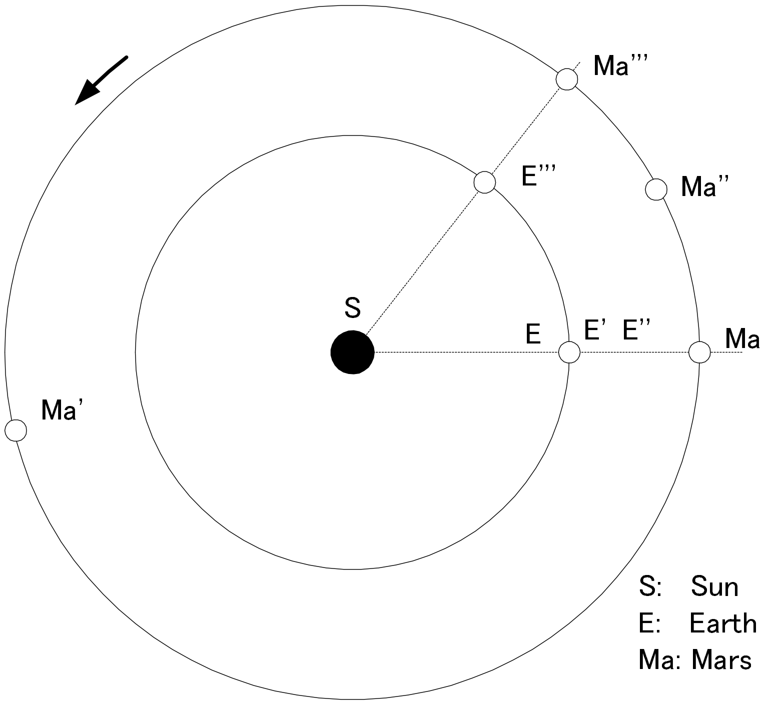
第 1 法則 (楕円軌道の法則)：　惑星は、太陽をひとつの焦点とする楕円軌道上を動く。
惑星の軌道は太陽を含む平面内。

第 2 法則 (面積速度一定の法則)：　惑星と太陽とを結ぶ線分が単位時間に描く面積は一定である。

$$(\text{面積速度}) = \frac{1}{2} \times (\text{速度}) \times (\text{腕の長さ}) = \frac{1}{2} \times (\text{角運動量}/\text{質量})$$

第 3 法則 (調和の法則)：　惑星の公転周期の 2 乗は、軌道の長半径の 3 乗に比例する。 $(\text{周期}) \propto (\text{長半径})^{3/2}$。
惑星の質量、軌道の離心率は影響しない。

火星の公転周期を求める



(1) 地球の**公転周期**は 365.25 日、

地球・火星・太陽の**会合周期**は 780 日

	地球	火星
初回会合	E	Ma
1 年後	E'	Ma'
2 年後	E''	Ma''
780 日後	E'''	Ma'''

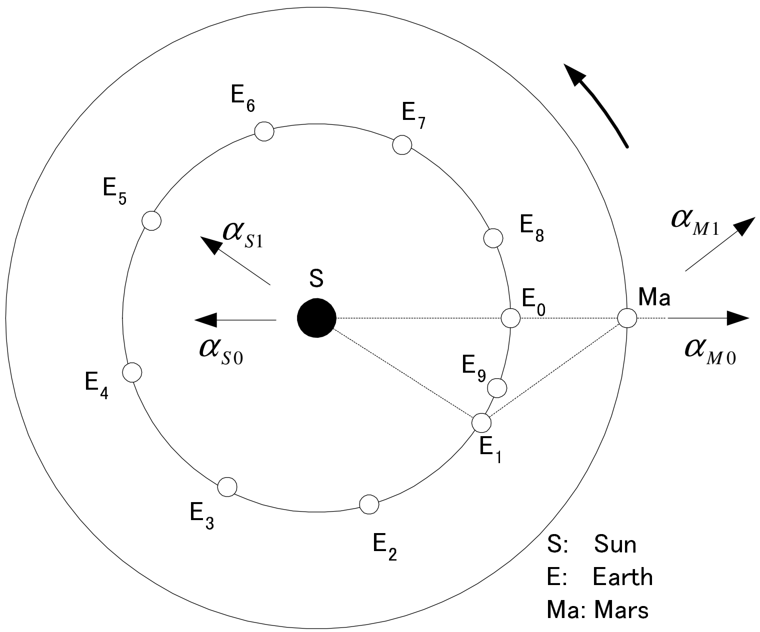
火星は**周回 (360 °) 遅れ**

(2) 780 日間の**回転角度**は、地球: $\frac{780}{365.25} \times 360$ °、火星: $\left(\frac{780}{365.25} - 1\right) \times 360°$

(3) 火星の**公転角速度**: $\left(\frac{780}{365.25} - 1\right) \times \frac{360}{780} = 0.524$ °/日 、

火星の**公転周期**: $\frac{360}{0.524} = 687$ 日 後に、火星は**同じ位置**。

地球の軌道を求める



(1) 687 日ごとの地球と火星の位置

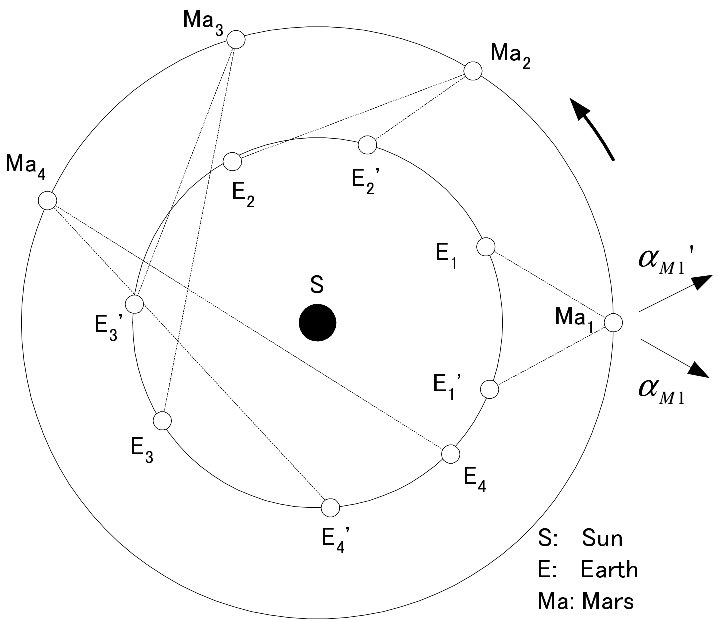
	地球	火星
初回	E_0	Ma
687 日後	E_1	Ma
+687 日後	E_2	Ma
$\cdots$	E_3	Ma

(2) 火星と太陽の観測値 (赤経・赤緯) より角度 α_{S1}、α_{M1} 等が求まる。

(3) $\overline{SMa}$ を基準線として、地球の位置 E_1 等が求まる。

(4) $E_1, E_2, \cdots$ を結んで地球の軌道。

火星の軌道を求める



687 日隔てた両日の火星は同じ位置。

(1) 両日の地球位置 E_1, E_1' は計算済

(2) 両日の火星の観測値 $\alpha_{M1}, \alpha_{M1}'$ から火星位置 Ma_1 が求まる。

(3) 両日の組をずらして火星位置 $Ma_2, Ma_3, \cdots$ 求まる

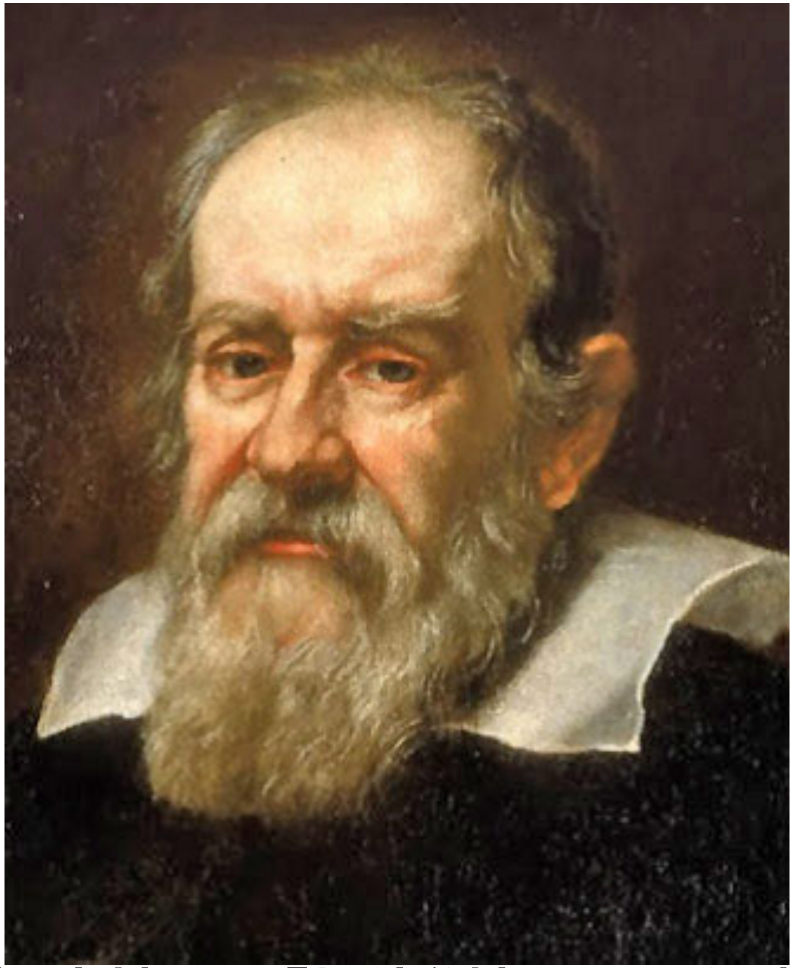
(4) $Ma_1, Ma_2, Ma_3, \cdots$ を結んで火星軌道が求まる。

$\longrightarrow$ 火星軌道は太陽を一つの焦点とした離心率 0.09 の楕円であった。

ケプラーは初めは地球の軌道を円と考え、円の中心は半径の 1.7/100 だけずれていると結論した。火星の軌道計算の後、地球も楕円に変更して計算し直した。

正確な離心率は、地球 0.0167, 火星 0.0934。

ガリレオ・ガリレイ (イタリア; 1564-1642)



トスカーナ大公領のピサで生まれ、ピサ大学で数学者オスティリオ・リッチからユークリッドやアルキメデスを学ぶ。ピサやパドヴァの大学で数学・天文学等を教え、その後、トスカーナ大公の招きでフィレンツェへ戻る。その間、自作の望遠鏡で月面、金星、木星、太陽黒点等の天文観測、落下運動等の力学研究を精力的に行なった。地動説の正しさを強く主張し、宗教裁判にもかけられた。

『天文対話』、『新科学対話』など出版し、その後の力学の基礎を築いた。

慣性の法則　『天文対話』

(地動説への疑問・批判)　　地球が西から東へ回転するなら、

「鉛直上方に投げられた物体はその西側へ落ちるのでは」

「雲や鳥は東へ飛ぶことは出来ないのでは」

「銃から撃った弾丸は西へ反れるのでは」

(ガリレオの説明)

地球と共に動く物体は、地球の動きを合わせ持っている。

物体の速度は、力という外部的原因の作用を受けない限り変化しない。

(当時の人々が疑問に思うことに、対話形式で逐一ていねいに答えている。)

慣性座標系で共通の運動法則が成立 ← 後世では「ガリレオの相対性原理」

「自然はもっとも簡単な方法で、すべてのことをなす」

しからば、落下する物体の

速度 ∝ 通過距離 か？　それとも、速度 ∝ 経過時間 か？

(ガリレオの論拠)

速度 ∝ 通過距離 と仮定すると、

物体が 2 メートル位置を通過する時の速度は、

1 メートルを通過したときの速度の 2 倍。

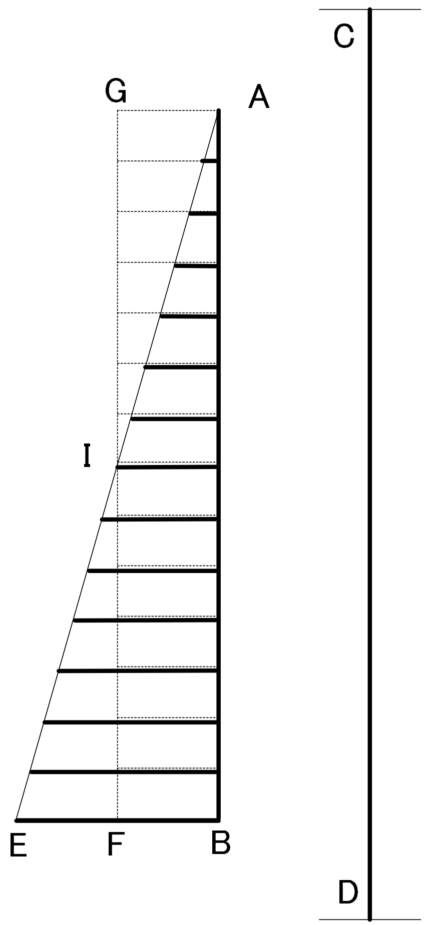
つまり、2 メートルを通過するのに要する時間 (=距離/速度) が、

1 メートルを通過するのに要する時間と同じ ！？

同一物体は、同じ瞬間に異なる場所を通過することはあり得ない。

したがって、速度 ∝ 通過距離 は誤り

定理１：平均速度定理



物体が位置 C **から位置** D **まで等加速度で落下。**

時間 AB**：時刻** A **の速度** 0、**時刻** B **の速度** BE。

$\rightarrow$ **任意時刻速度は、直線** AE **へ至る水平線分長**

ここで、BE **の** 2 **等分点を** F、BF=AG **とすると、**

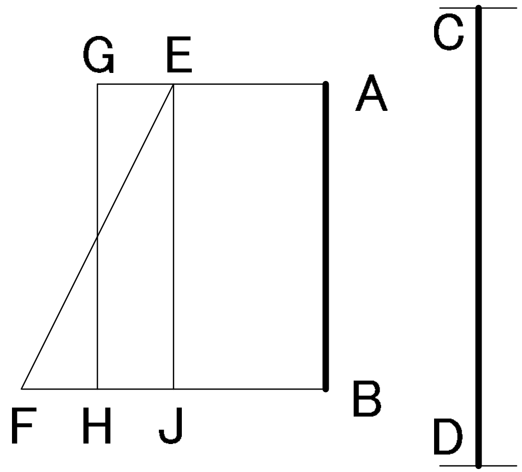
長方形 $AGFB$ の面積 $=$ 三角形 AEB の面積 **より**

AEB 内水平線分の和 $=$ $AGFB$ 内水平線分の和

したがって、

「物体が静止状態から等加速度運動で通過する距離は、最終速度の半分の一定速度で通過する距離に等しい。」

平均速度定理の補足



物体が時間 AB 間に等加速度で落下

時刻 A の速度 AE、時刻 B の速度 BF

時刻 A の速度の一定速度で進めば、

同時間に面積 AEJB だけ進む。

速度増加分 JF による距離増加は

JH =JF/2 として、面積 EGHJ

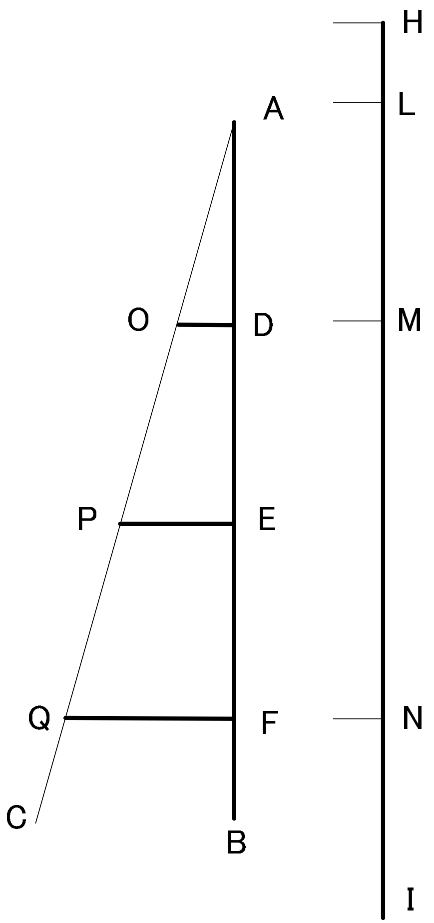
両者を合わせて、

時間 AB 間の通過距離：四角形 AGHB

したがって、「物体が等加速度運動で通過する距離は、

最初の速度と最後の速度の平均の一様速度で通過する距離に等しい。」

定理２：通過距離と時間 (時間 2 乗則)



時刻 A, D, E, F で、位置 H(静止), L, M, N 。

各時刻の速度は、線分 DO, EP, FQ で表される

平均速度定理より、

$$HL = \frac{1}{2}DO \times AD \ , \quad HM = \frac{1}{2}EP \times AE$$

$$\longrightarrow HL : HM = DO \times AD : EP \times AE$$

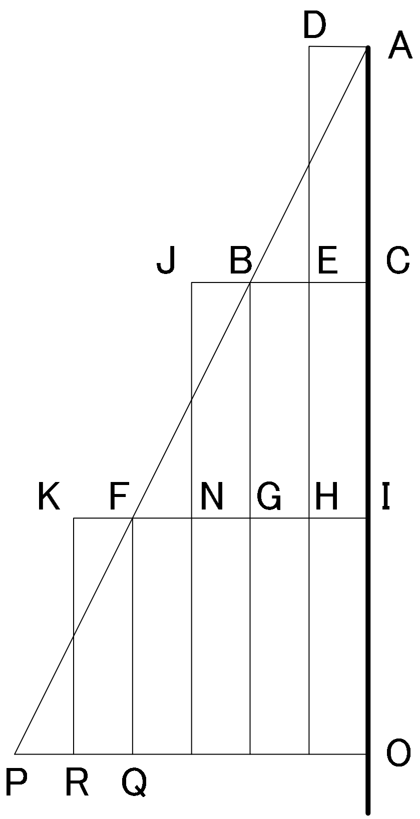
三角形の相似性より $DO : EP = AD : AE$

$$\longrightarrow HL : HM = AD^2 : AE^2 = (\text{時間})^2\text{の比}$$

したがって、

「静止から等加速度で落下する物体が通過する距離は、時間の 2 乗に比例する」

系１：奇数則



静止物体が落下、同じ時間 AC ＝ CI ＝ IO が経過。

速度直線は ABFP と表せる。

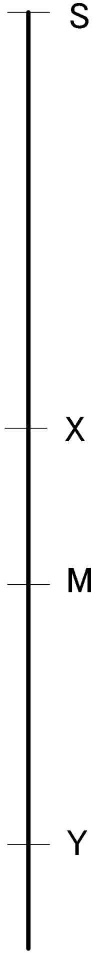
各時間で物体が進む距離は、平均速度定理より

時間	通過距離	比
AC	四角形 DACE の面積	1
CI	四角形 JCIN の面積	3
IO	四角形 KIOR の面積	5

となる。したがって

「等しい時間間隔 AC, CI, IO の間に落下物体が通過する距離の比は、連続する奇数の比となる。」

系 2：所定距離通過に要する時間 (幾何平均との比)



原点 S から物体が落下し、位置 X または Y に達するとき、

時間 2 乗則から

$$(SX\ \text{落下の時間}) : (SY\ \text{落下の時間}) = \sqrt{SX} : \sqrt{SY}$$

SX **と** SY **の幾何平均** $SM = \sqrt{SX \cdot SY}$ **を用いて、**

$$\sqrt{SX} : \sqrt{SY} = \sqrt{SX} : \frac{SM}{\sqrt{SX}} = SX : SM = SM : SY$$

したがって、

「原点から落下した物体が

二つの距離 SX **、**SY **を通過するに要する時間の比は、**

SX **、**SY **と幾何平均** SM **との比**

$SX : SM$ **または** $SM : SY$ **となる。」**

仮説演繹法　**近代の科学の方法**

仮説 (分析) $\rightarrow$ 結果を演繹 (総合) $\rightarrow$ 実験で検証：(**仮説演繹法**)

ただし、当時の数学は幾何学。結果を代数式でなく図形の長さ等で表示。

ガリレオの実験装置例 (斜面の実験装置)

長さ 5.5 m、**幅** 23 cm、**厚さ** 6 cm **の板。**

上面に幅 2 cm **の平滑な溝。溝内側に羊皮紙を張る。**

板の一端を 0.5〜1 m **高くし、硬く滑らかな真円の真鍮の球を転がす。**

斜面に沿う落下は自由落下に等価 $\longrightarrow$ **現象をゆっくり再現。**

落下する斜面の長さ 1、3/4、2/3、1/2、1/4 **に変化。各** 100 **回以上**

時間測定：大きな樽の小さい管からの水流出量を精密天秤で計量。

放物運動 $=$ **水平な等速運動** $+$ **鉛直な等加速度運動**

(0) **準備**

所与の放物線 BECE' ; **頂点** B **を通る鉛直線** BFDF'

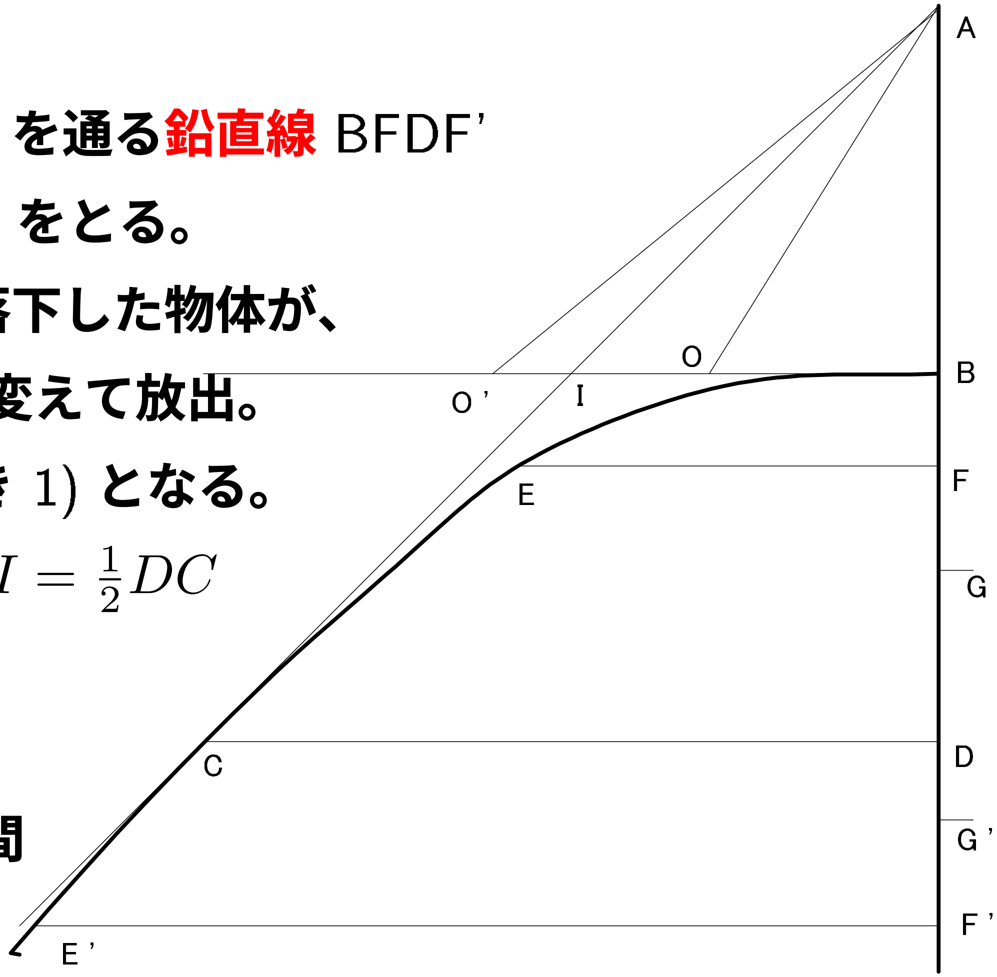
$DC = 2BD$ **となる点** C **と** D **をとる。**

$AB = BD$ **となる点** A **から落下した物体が、**

B **点で速度の方向を水平に変えて放出。**

直線 AC **は放物線の接線** (**傾き** 1) **となる。**

このとき、$AB = BD = BI = \frac{1}{2}DC$



基準値：線分 AB **の長さ**

L :**通過距離、** T :**経過時間**

V :B **での速度** ($= 2L/T$)

(1) B 点から時間 T 経過すると、位置 C に達する。

水平方向へ等速で $2L$ 移動し、速度は一定 V

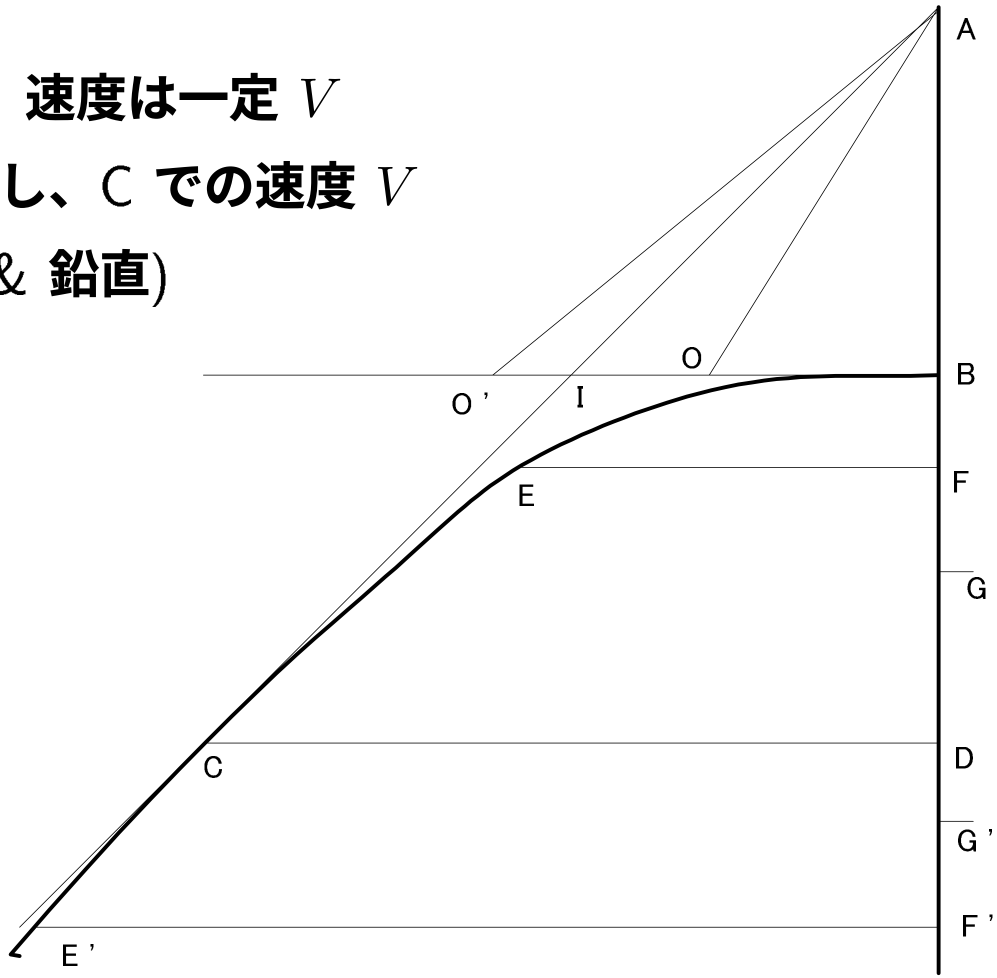
鉛直方向へ等加速度で L 落下し、C での速度 V

速度ベクトル：(change 水平 & 鉛直)

A を起点に、

水平成分 AB

鉛直成分 BI ; $\longrightarrow \overline{AI}$



(2) C 以前の位置 E

鉛直線 BD 上に、点 F (E と同じ高さ)。

鉛直線 BD 上に、点 G ($BG = \sqrt{BF \cdot BD}$)。

系 2 より

$$\frac{(BF \text{ の落下時間})}{(BD \text{ の落下時間；} T)} = \frac{BG}{BD}$$ が成立。

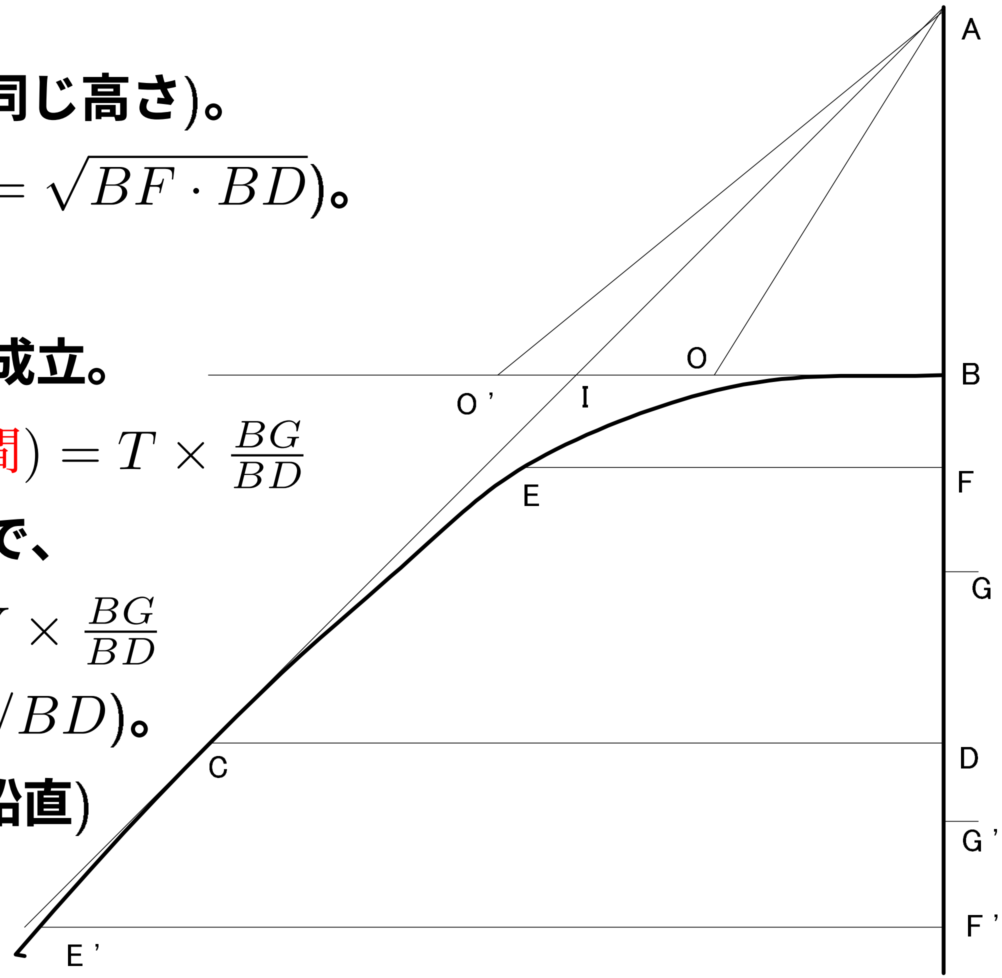
したがって　$(BF \text{ の落下時間}) = T \times \frac{BG}{BD}$

落下速度は時間に比例するので、

$$(\text{位置 } F \text{ での落下速度}) = V \times \frac{BG}{BD}$$

BI 上に点 O ($BO/BI = BG/BD$)。

速度は $\overline{AO}$ (change 水平 & 鉛直)



(3) C 以降の位置 E'　(E の場合と同様)

鉛直線 BD 延長上に、点 F' (E' と同じ高さ)。

鉛直線 BD 延長上に、点 G' ($BG' = \sqrt{BD \cdot BF'}$)。

系２より

$$\frac{(BF'\text{の落下時間})}{(BD\ \text{の落下時間；}T)} = \frac{BG'}{BD}$$ が成立。

したがって　$(BF'\text{の落下時間}) = T \times \frac{BG'}{BD}$

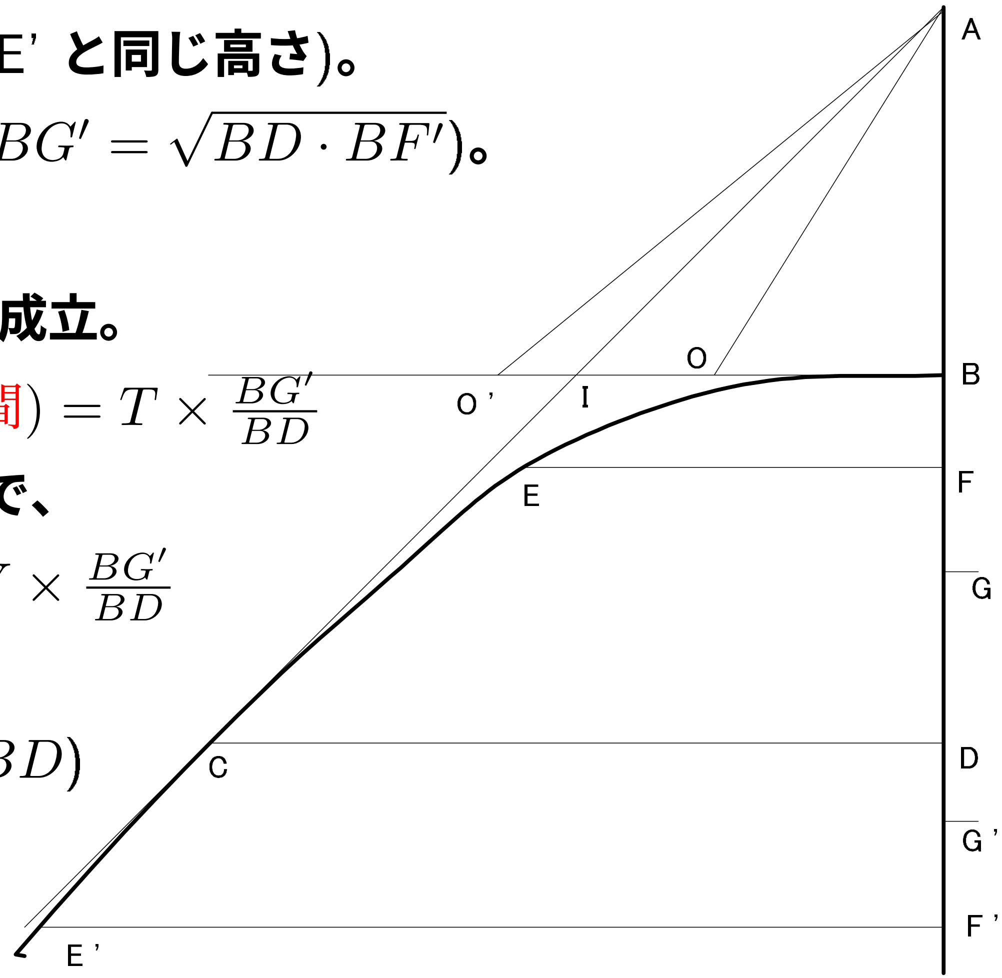
落下速度は時間に比例するので、

$$(\text{位置 } F'\text{での落下速度}) = V \times \frac{BG'}{BD}$$

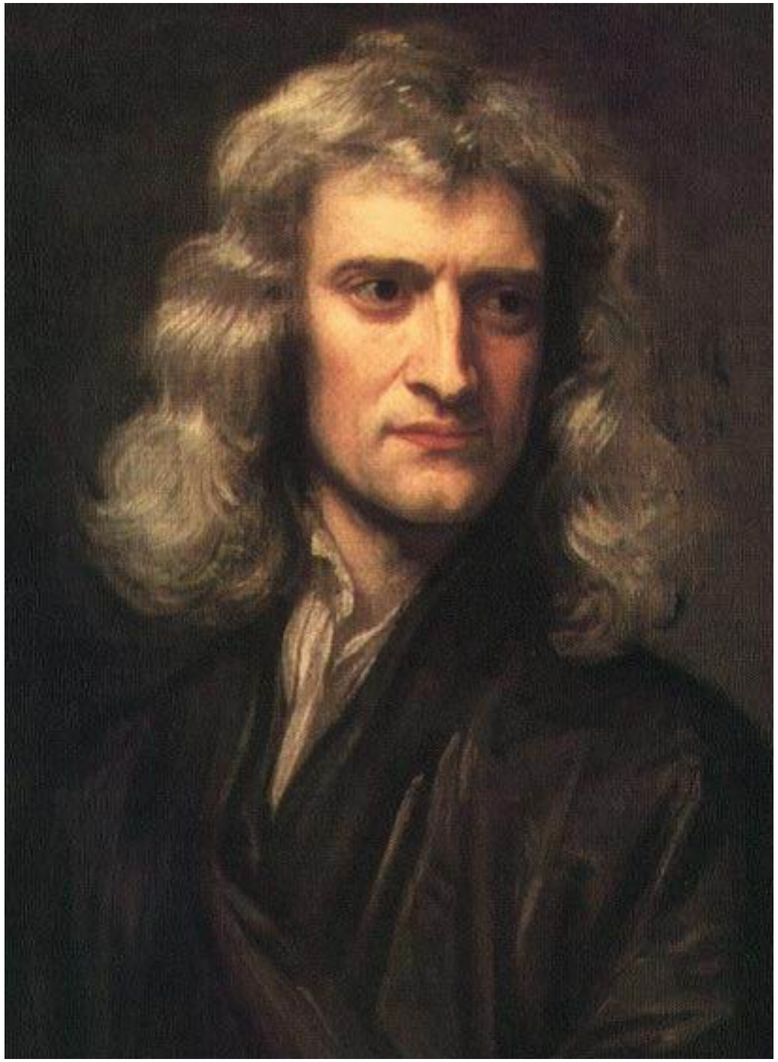
BI 延長上に点 O'

(ただし $BO'/BI = BG'/BD$)

速度は $\overline{AO'}$



アイザック・ニュートン (1642-1727)



イングランドのリンカーンシャー州グランサム近郊で生まれ、グラマースクール後、ケンブリッジ・トリニティ・カレッジで学んだ。ケンブリッジ大でフェロー職、ルーカス教授職に就き、「自然哲学の数学的諸原理(プリンキピア)」(1687) などを著した。ケプラーの法則をもとに、万有引力の法則・運動の法則を導き、力学の基礎を築いた。微積分法 (流率)、光学分野等でも貢献した。

ニュートンによる運動の法則

法則１(慣性の法則)　すべて物体は、外力によってその状態を変えられない限り、その静止の状態あるいは直線上の一様な運動の状態をそのまま続ける。

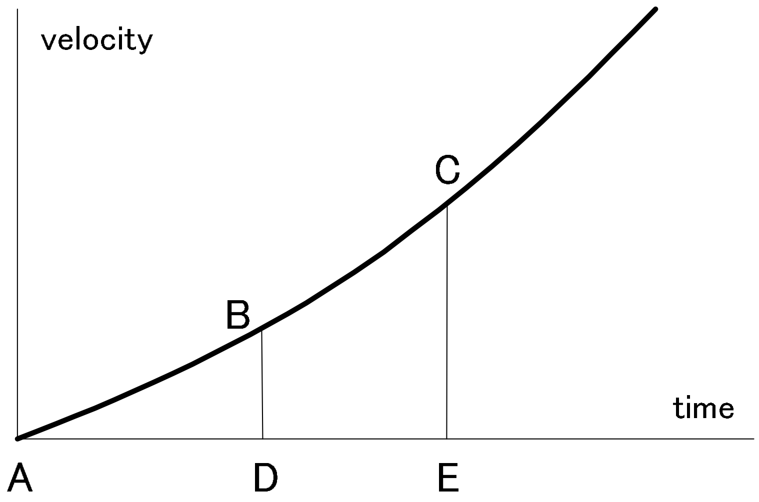
法則２(運動の法則)　運動の変化は及ぼされる起動力に比例し、その力が及ぼされる直線の方向に行われる。

法則３(作用反作用の法則)　２物体の相互の作用は、常に相等しく逆向きである。

系１：物体は合力によって、個々の力を辺とする平行四辺形の対角線を同じ時間内に描く。

つまり、運動している物体にある力が作用したときの運動は、慣性法則による運動と加速度運動による運動のベクトル合成。

補助定理 10 (系 3 を含む)：時間と通過距離



(距離) $\propto$ (速度) $\times$ (時間) において、

運動開始時点では、

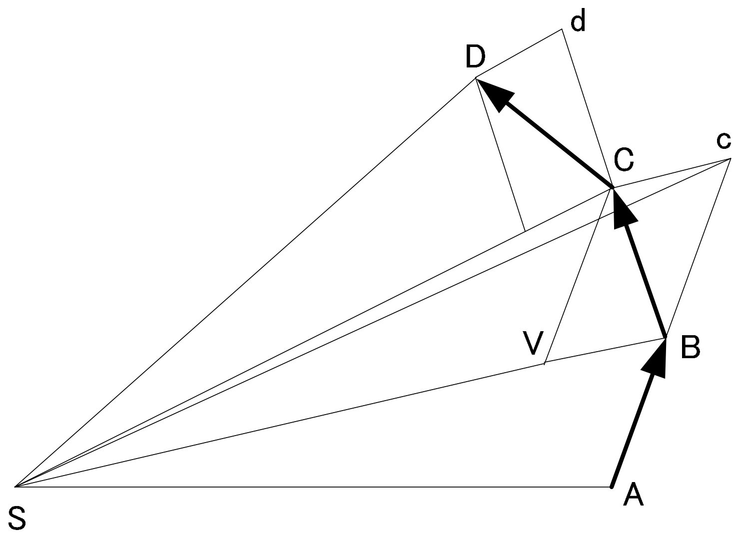
$$
\begin{aligned}
(\text{速度}) &\propto (\text{速度増加}) \times (\text{時間}) \\
&\propto (\text{力}) \times (\text{時間})
\end{aligned}
$$

であるので

$$(\text{距離}) \propto (\text{力}) \times (\text{時間})^2$$

運動の始まりでは、距離は時間の 2 乗と力の積に比例する。

命題 1 (面積速度一定則) 向心力を受ける物体の運動



時間間隔 Δt ごとの物体の動き

(第 1 時間区分)　線分 $\overline{AB}$

(第 2 時間区分)

法則 1 より $v\Delta t = \overline{Bc}$

ただし、面積△ ASB = △ BSc

法則 2 より、$\overline{BS}$ 方向の向心力で

$\overline{cC}$ の変位を受け、$\overline{BC}$ へ進む。

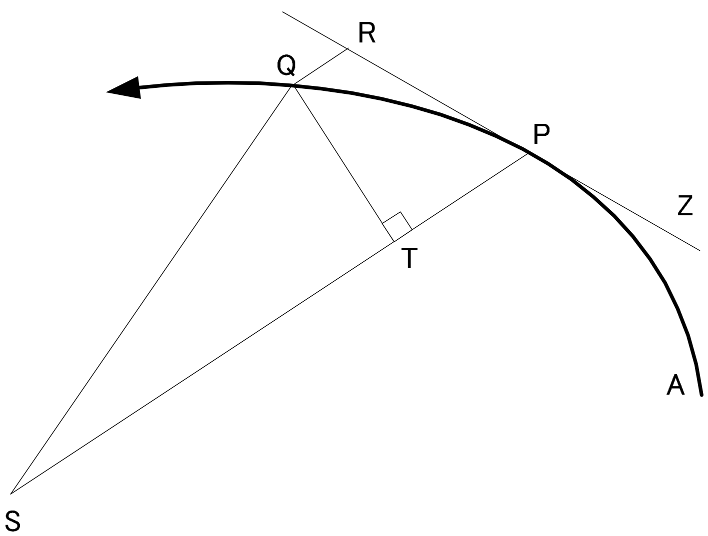
このとき、$\overline{cC}//\overline{BS}$ であるので △ BSc = △ BSC

したがって、△ ASB = △ BSC となる。

「向心力を受ける物体の動径が描く面積速度は一定である。」

命題 6 系 1(曲線運動と向心力)

「中心 S から向心力を受けて周回する物体が曲線 APQ を描く。曲線 P における接線を ZPR とし、曲線上任意点 Q から接線 ZPR に向かって、SP に平行に QR を引き、Q から SP に垂線 QT を下ろしたとき、点 Q が P に接近する極限において、向心力は $\overline{SP}^2 \times \overline{QT}^2 / \overline{QR}$ に反比例する。」



(証明)

補助定理 10 より

$$\overline{QR} \propto (\text{向心力}) \times (\Delta t)^2、$$

面積速度一定則より

$$\Delta t \propto \overline{SP} \times \overline{QT}$$

の関係がある。

したがって、$(\text{向心力}) \propto \frac{\overline{QR}}{(\Delta t)^2} \propto \frac{\overline{QR}}{\overline{SP}^2 \times \overline{QT}^2}$ が成立する。

その他、プリンキピアでニュートンが示したこと (詳細はテキスト)

(1) 面積速度一定で楕円軌道を回るには、向心力は焦点からの距離の 2 乗に反比例していなければならない (命題 11)。

(2) 距離の逆 2 乗則の向心力を受ける惑星が楕円軌道をとれば、ケプラーの第三法則 (惑星の公転周期の 2 乗は、軌道の長半径の 3 乗に比例する) が成り立つ (命題 15)。

(3) 距離の逆 2 乗則の向心力を受ける惑星が楕円軌道をとる場合、その軌道 (焦点間距離、長径、短径) の求め方を示した (命題 17)。

(4) 任意の向心力を受けて直線上を運動する物体の、任意位置での速度、時間を求める図式解法を示した (命題 39)。

(5) 等々。

まとめ

- コペルニクス、ケプラー、ガリレオ、ニュートンの一連の流れ
- この過程では、古代ギリシャ由来の幾何学の役割が大きかった。
- 幾何学は問題ごとに閃きと工夫が必要で、他の問題へ応用し難い。
- ニュートンは、ケプラーの法則をもとに万有引力の法則を導いた。
- 力と運動法則から惑星の軌道を求めることは、できたのか？
- ニュートンの微積分法は？