3．ニュートン以降の力学の確立 (特別講義:科学技術史)

S. Yamauchi

2017 年 7 月 22 日

目次

0　はじめに

ニュートンの「プリンキピア」はケプラーによる惑星運動の法則とガリレオ等による運動の法則を結びつけて，万有引力の発見，および天上と地上に共通な力学の樹立という偉業をなしとげた。

しかし，前回見たように，ニュートンの力学はギリシャの幾何学の延長であり，今日の力学とは似ても似つかないものに見える。一部には，実は，ニュートンは彼の流率法 (微分法) を用いてすべてを解決した上で，伝統的な幾何学を基礎にした形式に書き換えて発表したのだ，との説もあるが，これはあまり根拠がなさそうである。

力学はニュートンの後，ニュートンに対立していたヨーロッパ大陸へ移り，本稿で取り上げる人々によって現在の形に確立していったようである。この間，ニュートン以外のイギリス人の名は出てこないし，ニュートン理論を受け入れようとしなかった大陸の科学者が，結局ニュートン力学を完成させた，このような構図が見える。その間，ニュートンのイギリスは大航海時代の先頭を走っており，産業革命を急速に進行させ，新しい世界の頂点に登りつめていたのである。

実験的経験的方法を重視したイギリスのフランシス・ベーコン (1561-1626) の思想と，一般普遍的な原理原則をもとに理論的演繹的方法を重視したフランスのルネ・デカルト (1596-1650) の思想との影響が顕著に見て取れるように思える。現代の国際政治の場でも，このような対立 (対照) が時折見られ，興味深い。

本稿の多くの部分は山本氏の著書 [1] に拠っている。(引用，一部修正の責任はあるが，) 私のオリジナルではないことをお断りしておく。

1　微分法と運動方程式

1.1　ライプニッツと微分法

■ライプニッツの生涯　ゴットフリート・ヴィルヘルム・ライプニッツ (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716) は，**ドイツ** (神聖ローマ帝国) のライプツィヒ出身の哲学者，数学者，科学者であり，幅広い分野で活躍した学者・思想家として知られている。政治家であり，外交官でもあった。17 世紀の様々な学問 (法学，政治学，歴史学，神学，哲学，数学，経済学，自然哲学，論理学等) を統一し，体系化しようとした。その業績は法典改革，モナド論，微積分法，微積分記号の考案，論理計算の創始，ベルリン科学アカデミーの創設等，多岐にわたる。

(哲学における業績)

略

(数学における業績)

微積分法をアイザック・ニュートンとは独立に発見・発明し，それに対する優れた記号法すなわちライプニッツの記法を与えた。現在使われている微分や積分の記号は彼によるところが多い。また，今日の論理学における形式言語に当たるものを初めて考案し，2 進法を研究したのもライプニッツの業績である [3][4]。

Fig. 1 Gottfried Wilhelm von Leibniz

■ニュートンとライプニッツ　.

ニュートンとライプニッツと (またはその周囲) の間で，二つの問題で確執が生じた。**惑星の運動に関するライプニッツの論文**のオリジナリティの問題と，**微積分法**をどちらが先に考案したかという問題であった。

惑星運動に関するライプニッツの論文　ニュートンが 1687 年に「プリンキピア」を発表して 2 年後の 1689 年に，ライプニッツは同様の**論文「惑星の運動の原因についての試論」**を発表した。ライプニッツはこのなかで，中心力のもとでの運動方程式を微分方程式としてはじめて表現し，ニュートンが幾何学的に解いた万有引力の誘導を，はじめて解析的に行った。

当初よりこの論文は，プリンキピアの剽窃 (ひょうせつ) ではないかと関心を集め，大きな論争となった。ライプニッツは，「プリンキピアの書評」(1688) ではじめて「プリンキピア」の内容を知り，それ以前に考えていた内容を取りまとめて公表したものだと主張した。

しかし後年の 1967 年になって，ライプニッツが直接書き込んだと見られる「プリンキピア」初版への書き込みが発見されるなど，ライプニッツは**「プリンキピア」を詳細に読んだ上で，大急ぎで表記論文を発表**したことは，ほぼ間違いないようである [1]。

微積分学発見の優先権論争　この問題については多くの解説があり，両者はそれぞれ独立に発見したという点で概ね一致している。その一つを下記に引用する [5]。

> ライプニッツはデカルトやパスカルと同様、数学や自然科学の分野においても顕著な業績を残した。とりわけ数学の分野においては、微分積分学と記号論理学の創始者として、歴史的な業績を上げた。
>
> ライプニッツが微分法の研究に打ち込んだのは、パリに滞在していた 1675 年から 76 年にかけてであるが、彼がパリに滞在した理由というのが振るっている。当時のフランス国王ルイ 14 世がドイツを侵略する計画をもっていることを知り、マインツ大司教の使いとなって、侵略の矛先をエジプトに変えるよう説得しにいったというのである。ライプニッツはこの時にかかわらず、生涯の節々で外交官のような役割を何度もつとめている。
>
> 結局フランスによるエジプト侵略は、後にナポレオンによって実現することになるが、そのことに対して、ライプニッツがどの程度の影響を及ぼしているのか、つまびらかではない。
>
> さて、ライプニッツは連続性の概念をもとに、数の無限分割から微分法を思いついたとされる。ところがライプニッツよりも 10 年ほど前に、ニュートンが力学的な観点から微分法を発見していた。ニュートンはライプニッツよりも 4 年早く生まれただけで、二人はほぼ同時代人であった。しかし、ライプニッツはニュートンの研究のことは何も知らず、したがって微分法を取り上げる方法も、両者では異なっていた。
>
> ライプニッツは 1684 年に「極大と極小にかんする新しい方法」を出版して、その中で微分法を発表し、ついで 1686 年に「深遠な幾何学」を出版して積分法を発表した。ニュートンが微積分法を発表するのはこれより遅れ、1687 年に出版した「プリンキピア」の中でであった。
>
> 両者の研究が出揃っても、当初は互いに相手のことを気にしなかったらしい。ニュートンは 1695 年になってライプニッツの業績を知り、しかも微分法についてはライプニッツが草案者であるとの見方がヨーロッパで定着してさえいるのを見て、苦々しく思ったに違いないが、自分からはそれを問題にすることはしなかった。

だが周囲がそれを放ってはおかなかった。ニュートンの支持者は、ライプニッツがニュートンのアイデアを盗んだのだと口汚く罵り始めた。ニュートンもまた、それを見て見ぬ振りをした。一方ライプニッツ側も、独創性の主張を譲らなかった。こうして両陣営の論争は泥沼化し、歴史上でも有数の論戦に発展していく。

ライプニッツの暮らしていたハノーバーの君主ジョージ一世がイングランド国王になったときに、ライプニッツは同行を許されなかった。それは彼とニュートンとの論争が災いしたのだといわれている。

今から振り返れば、微分積分については、その考え方やツールの面で、ライプニッツの方に軍配が上がった形だ。今日の微積分の考えのもととなっている関数的な概念はライプニッツのものであるし、微分を表わす dx,　積分を表わす S という記号もライプニッツが用いたものである。

■ライプニッツの惑星運動　「惑星の運動の原因についての試論」より

ライプニッツは，惑星の運動を周方向と半径方向に分けて考えようとした。周方向は「**調和回転**」をすると考え，半径方向は，**力のつりあい**より遠心力の表示式を導いた。

惑星の運動について，天動説に代わって，ニュートン以前に**ルネ・デカルト** (1596-1650) が「哲学原理」(1644) のなかで**渦動説**を唱えていた。デカルトは，宇宙はエーテルと呼ぶ流体で満たされており，太陽の周りを渦運動をしているとし，水の上に浮かぶ木片が円運動するのと同じように，惑星が太陽の周りを回ると考えた。欧州大陸では大きな影響を与えていた。ライプニッツも渦動説を支持しており，ニュートン説のように何も接触していない太陽が惑星に力を及ぼすことはありえないと考えて，これをエーテルの運動で説明しようとした。

惑星の**周方向運動**は水面の渦と同じく中心で速く周囲で遅くなる，いわゆる「**調和回転**」

$$v_\theta \propto \frac{1}{r}$$

を行うとした。これは面積速度一定則　(面積速度) $= (1/2) r v_\theta = \mathrm{const.}$　に合致している。

一方，**半径方向**については，**力のつりあい**を考えた。

Fig.2 において，周速度 v で半径 r の**円運動**をしている物体が，微小な dt 時間に M から P へ動いたとする。慣性の法則では物体は $\overline{Mv}$ だけ移動するので，向心力による移動量は $\overline{Pv}$ となる。

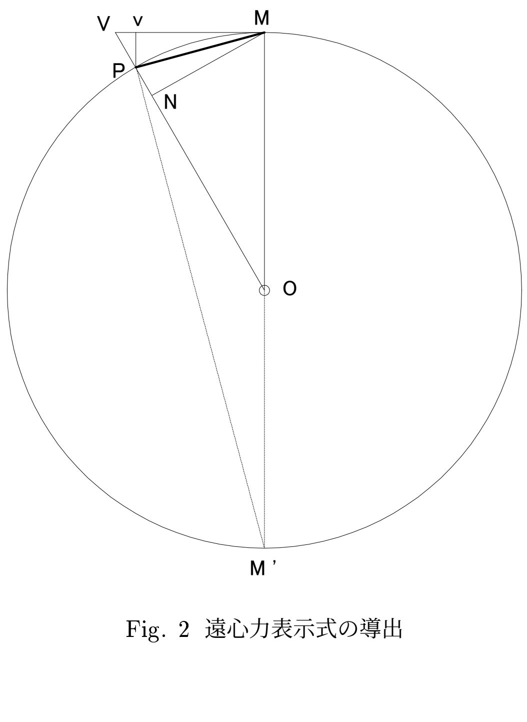


Fig. 2　遠心力表示式の導出

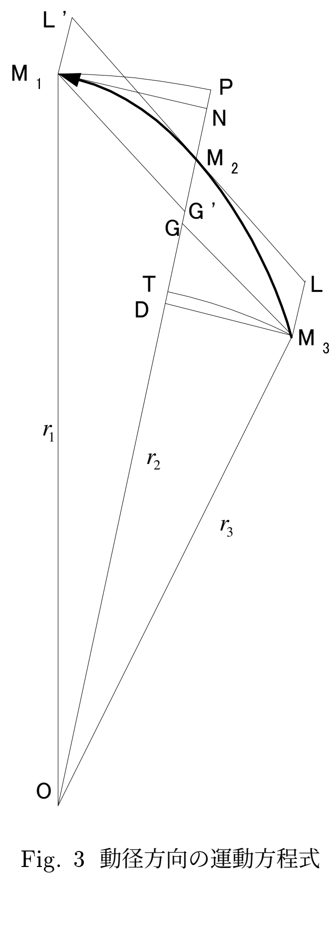


Fig. 3　動径方向の運動方程式

ここで，$\triangle PvM \equiv \triangle PNM$(合同) および $\triangle PvM \sim \triangle PMM'$(相似つまり、$\overline{Pv}/\overline{PM} = \overline{PM}/(2r)$) であることから，

$$\overline{Pv} = \overline{PN} = \frac{\overline{PM}^2}{2r} = \frac{v^2}{2r}dt^2$$

となる。

一方，単位質量あたりの遠心力を $f_C(r)$ とすると，それによる dt 時間の移動量は

$$\frac{1}{2}f_C(r)dt^2$$

と表されるので，両者を等しいと置いて，次の**遠心力の表示式**が求まる。

$$f_C(r) = \frac{v^2}{r}$$

次に，円運動ではない**一般の曲線運動**を考える。Fig.3 のように曲線に沿って微小時間 dt ごとに M_3，M_2，M_1 と進む場合，半径 $\overline{OM_3} = r_3$，$\overline{OM_1} = r_1$ の円弧 $\widehat{M_3T}$，$\widehat{PM_1}$ を描き，M_3，M_1 から OM_2 へ下ろした垂線の足を D, N とすると，上の $\overline{PN}$ に相当するのが $\overline{TD}$，$\overline{PN}$，円弧 $\widehat{PM}$ に相当するのが円弧 $\widehat{TM_3}$，$\widehat{PM_1}$ または $\widehat{DM_3}$，$\widehat{NM_1}$ と考えればよい。

このとき，

$$\frac{1}{2}f_C(r)dt^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{DM_3}^2}{2r_3} + \frac{\overline{NM_1}^2}{2r_1}\right) \to \frac{v_\theta^2}{2r}dt^2$$

より，**一般の曲線運動の遠心力表示式**として次式を得る。

$$f_C(r) = \frac{v_\theta^2}{r} \tag{1}$$

ただし，v_θ は**速度の周方向成分**であり，

$$v_\theta dt = \overline{DM_3} = \overline{NM_1} = rd\theta$$

である。

特に面積速度一定の場合は

$$\triangle M_2OM_3 = \frac{1}{2}\overline{DM_3} \times \overline{OM_2} = h\ dt$$

より

$$\overline{DM_3} = \frac{2h\ dt}{OM_2} \simeq \frac{2h\ dt}{r_2}$$

となるので，

$$\frac{1}{2}f_C(r)dt^2 = \frac{\overline{DM_3}^2}{2r_2} = \frac{(2h)^2}{2r_2^3}dt^2$$

これより，**面積速度一定の曲線運動の遠心力表示式**は

$$f_C(r) = \frac{(2h)^2}{r^3} \tag{2}$$

となる。

ライプニッツは，導いた遠心力表示式を用いて，半径方向の運動方程式を導いた。

遠心力と向心力がつりあっていない場合，半径方向の加速度が生じる。

Fig.3 において，物体が $M_3 \to M_2 \to M_1$ へ進むとする。半径の変化量 (微分)

$$\overline{PM_2} = r_1 - r_2 = dr_{12}$$
$$\overline{M_2T} = r_2 - r_3 = dr_{23}$$

の差 (2 階微分)

$$\overline{PM_2} - \overline{M_2T} = dr_{12} - dr_{23} = d^2r$$

を考える。

d^2r の値を評価するために，Fig.3 において，$\mathrm{M_2}$ における接線 $\mathrm{LM_2L'}$ を引き，それに平行に $\mathrm{M_3G}$，$\mathrm{M_1G}$ を引く。$\mathrm{LM_3}$，$\mathrm{L'M_1}$ は $\mathrm{M_2O}$ に平行とする。面積速度定理より

$$\triangle M_3OM_2 = \triangle M_2OM_1$$

より，

$$\overline{M_3D} = \overline{M_1N}$$

したがって，$\triangle M_3DG \equiv \triangle M_1NG'$ となるので，$\overline{DG} = \overline{NG'}$ となる。

$$\overline{PM_2} = \overline{PN} + \overline{NG'} - \overline{M_2G'}$$
$$\overline{M_2T} = \overline{M_2G} + \overline{DG} - \overline{TD}$$

より，

$$d^2r = \overline{PM_2} - \overline{M_2T} = \overline{PN} + \overline{TD} - \overline{M_2G} - \overline{M_2G'}$$

となる。

ここで，$\overline{PN} + \overline{TD}$ は $\mathrm{M_3M_2}$ 間と $\mathrm{M_2M_1}$ 間の遠心力による変位の和であり，$\overline{M_2G} + \overline{M_2G'}$ は $\mathrm{M_3M_2}$ 間と $\mathrm{M_2M_1}$ 間の重力 (求心力) による変位の和である。したがって，$\mathrm{M_2}$ における遠心力，重力を $f_C(r)$，$f_G(r)$ とすると，

$$\frac{1}{2}(\overline{PN} + \overline{TD}) = \frac{1}{2}f_C(r)dt^2$$
$$\frac{1}{2}(\overline{M_2G} + \overline{M_2G'}) = \frac{1}{2}f_G(r)dt^2$$

これを上の式に用いて，**半径方向の運動方程式**は

$$d^2r = \{f_C(r) - f_G(r)\}\,dt^2 = \left\{\frac{v_\theta^2}{r} - f_G(r)\right\}dt^2 \tag{3}$$

となる[*1]。

面積速度一定の場合は $h = (1/2)rv_\theta$ より

$$d^2r = \left\{\frac{(2h)^2}{r^3} - f_G(r)\right\}dt^2 \tag{4}$$

となる。

[*1] 現在では $\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{{v_\theta}^2}{r} = \frac{F_r}{m}(= -f_G(r))$ と書かれるが，同一である。

ライプニッツは，楕円軌道から向心力をはじめて解析的に求めた。

ライプニッツは，運動方程式 (3) を求めた上で，楕円軌道に適用して向心力を求めている。楕円のパラメータを

$$
\begin{aligned}
\text{長径} &= \overline{OA} = \overline{OA'} = a \\
\text{離心率} &= \overline{OC}/\overline{OA} = e \\
\text{短径} &= \overline{OB} = \overline{OB'} = b = a\sqrt{1-e^2}
\end{aligned}
$$

とする。

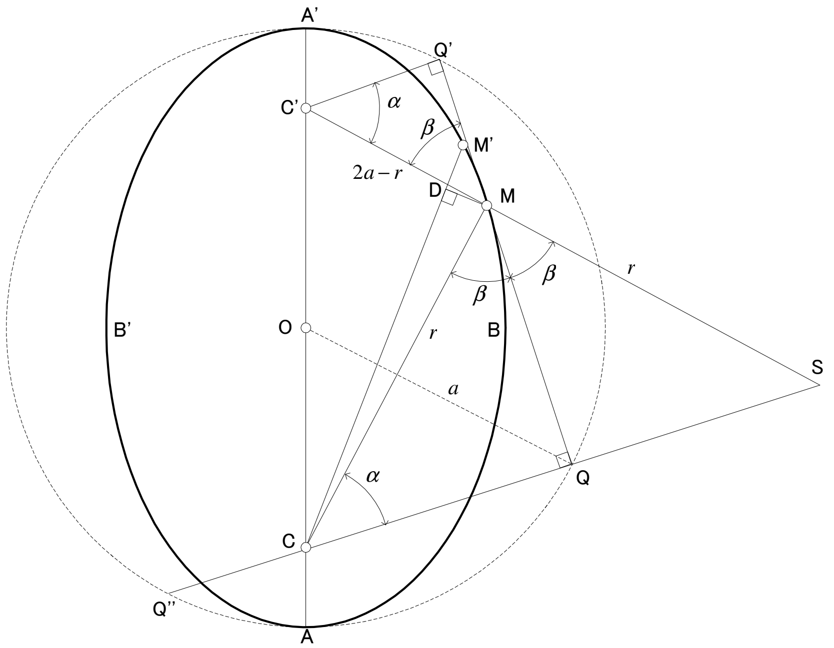


Fig. 4 楕円軌道

Fig.4 において，微小時間 Δt 間に物体が M から M' へ進んだとし，M から CM' に下ろした垂線の足を D とする。

比 $\overline{DM'}/\overline{DM}$ は

$$
\frac{\overline{DM'}}{\overline{DM}} = \frac{dr}{(2h/r)dt} = \frac{\sqrt{e^2-p^2}}{\sqrt{1-e^2}} \tag{5}
$$

となる[*2]。ただし，$p=(r-a)/a$ と置いている。

---

*2 Δt が十分小さければ $\overline{DM'} = \Delta r$ であり，面積定理より $\overline{DM} = (2h)\Delta t/r$ となるので，

$$
\frac{\overline{DM'}}{\overline{DM}} = \frac{\Delta r}{2h\Delta t/r}
$$

となる (最初の等号済)。

次に，$\overline{DM'}/\overline{DM} = \tan(\angle DMM')$ より，$\angle DMM'$ について考える。Δt が十分小さければ $\overline{MM'}$ は接線に一致する。C,

ここで，$b = a\sqrt{1-e^2}$ を用いると，

$$brdr = 2ha\sqrt{e^2 - p^2}dt \tag{6}$$

となるので，これをもう一度微分すると，

$$b(dr)^2 + brd^2r = 2h\frac{-p}{\sqrt{e^2-p^2}}dr \cdot dt \tag{7}$$

式 (6)，(7) より dr を消去して整理すると

$$d^2r = (2h)^2 \left\{ \frac{1}{r^3} - \frac{a}{b^2r^2} \right\} (dt)^2 \tag{8}$$

となる[*3]。式 (8) と式 (4) を比較すると，**向心力 (万有引力) として次式**が得られる。

$$f_G(r) = \frac{a(2h)^2}{b^2} \cdot \frac{1}{r^2} \tag{9}$$

式 (8) と式 (9) は軌道曲線 (a, b, h) から力を求める初めての解析解であり，力学における最初の微分方程式ということになる (以上「試論」より)。

C' から接線に下した垂線の足を Q，Q' とし，CQ と C'M の延長線の交点を S とする。楕円の性質より

$$\angle CMQ = \angle MSQ = \angle C'MQ' = \beta \simeq \angle CM'Q$$

ゆえに

$$\angle DMM' = \frac{\pi}{2} - \angle CM'Q \simeq \frac{\pi}{2} - \angle CMQ = \frac{\pi}{2} - \beta \equiv \alpha$$

また，図より $\triangle CMQ \equiv \triangle SMQ$ より，$\overline{CM} = \overline{SM} = r$，$\overline{CQ} = \overline{SQ}$ である。

$$\overline{CM}\cos\alpha = r\cos\alpha = \overline{CQ}$$
$$\overline{C'M}\cos\alpha = (2a - r)\cos\alpha = \overline{C'Q'}$$

また，$\overline{CO} = \overline{C'O}$ ゆえ $\triangle COQ \sim \triangle CC'S$。したがって，$\overline{C'S}/\overline{OQ} = \overline{CC'}/\overline{CO} = 2$ より，

$$\overline{OQ} = \frac{1}{2}\left(\overline{C'M} + \overline{MS}\right) = a = \text{const.}$$

$$r\cos\alpha \times (2a - r)\cos\alpha = \overline{CQ} \times \overline{C'Q'} = \overline{CQ} \times \overline{CQ''} = \overline{CA} \times \overline{CA'} = a^2(1 - e^2)$$

ゆえに

$$\cos\alpha = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{r(2a-r)}}$$
$$\frac{\overline{DM'}}{\overline{DM}} = \tan\alpha = \frac{\sqrt{(ae)^2 - (a-r)^2}}{a\sqrt{1-e^2}} = \frac{\sqrt{e^2-p^2}}{\sqrt{1-e^2}}$$

*3 平面極座標の楕円の式

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\phi}$$

が既知であれば，これを用いれば，下記のように式 (8) を導くことができる。

$$\frac{dr}{dt} = \frac{a(1-e^2)e\sin\phi}{(1+e\cos\phi)^2}\frac{d\phi}{dt} = \frac{e\sin\phi}{a(1-e^2)}r^2\frac{d\phi}{dt} = \frac{2he\sin\phi}{a(1-e^2)}$$
$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{2he}{a(1-e^2)}\cos\phi\frac{d\phi}{dt} = \left(\frac{1}{r} - \frac{a}{b^2}\right)\frac{(2h)^2}{r^2}$$

1.2　ヴァリニョンと順ニュートン問題

■ヴァリニョンの生涯　ピエール・ヴァリニョン (Pierre Varignon, 1654-1722) はフランスの数学者。数学の分野ではヴァリニョンの定理や対数螺線の研究で知られ，静力学の分野でのヴァリニョンの定理 (力の平行四辺形，力のモーメントの和に関する) などでも知られる。フランスの北西部の都市カーンに生まれた。カーンのイエズス会の学校に学び，カーン大学で学位を得て，翌年司祭叙階を受けた。ユークリッドの本を読み，デカルトの『幾何学』を読んで数学の研究に取り組んだ。1688 年にパリのコレージュ・マザランの数学の教授となり，同じ年に科学アカデミーの会員に選ばれた。1704 年にはコレージュ・ロワイエの数学の教授となった。微積分の分野を拓いた**ニュートン，ライプニッツやヨハン・ベルヌーイら**と親しく，微分法のフランスにおける先駆者である [6]。

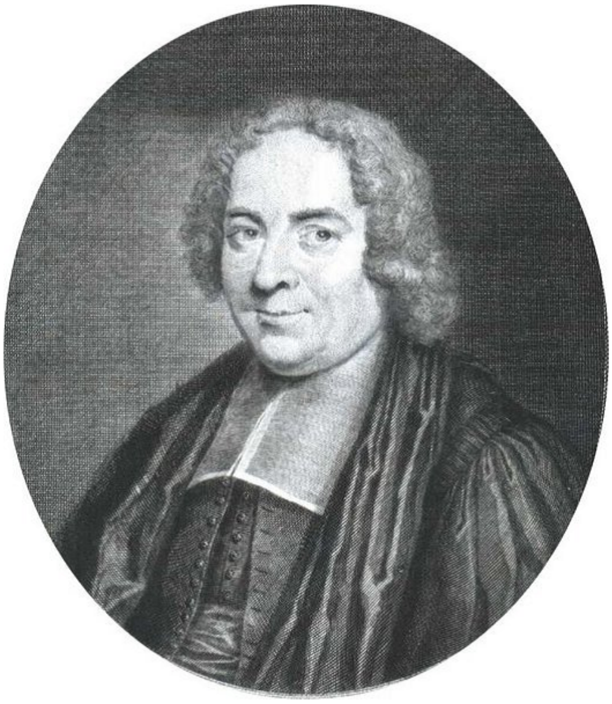


Fig. 5 Pierre Varignon

ヨハン・ベルヌーイが 1692 年にパリを訪れたとき，13 歳下の彼から微積分の手ほどきを受けた。ニュートンがプリンキピア第 1 編で幾何学的に導いた一連の命題を，ライプニッツ流の微分法で解析的に証明した [1]。

■プリンキピア命題の解析的導出 .

ヴァリニョンは，ニュートンがプリンキピアで幾何学的に導いた諸命題をライプニッツ流の微分法で解析的に証明した。

ヴァリニョンは直線 (1 次元) 運動について次のように考えた。

各瞬間 dt 間に速度 v で動いていたとしたら横切るであろう距離を dx、その間の速度の増加を dv、**速度の増加分により横切られる余分の距離**を ddx と表す。

速度は距離と時間の比であるから直ちに次の関係が得られる。

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{10}$$

これより $dv = \frac{ddx}{dt}$ となる。

また，一定で連続的な力 f で動かされるときは $dv = fdt$ であり、物体が通過する距離は，時刻 $t = t_1$ での速度を v、$t = t_2 = t_1 + dt$ での速度を $v + dv = v + fdt$ とすると、それぞれの速度で dt 間に横切る距離は $dx_1 = vdt$、$dx_2 = (v + dv)dt$ であり、速度の増加分 dv により横切られた余分の距離 ddx は $ddx = dx_2 - dx_1 = dvdt = fdt^2$ となる。書き換えると

$$f = \frac{ddx}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \tag{11}$$

となる (これが**速度表示や運動方程式で微分商が用いられた最初の例**のようである)。

(プリンキピア命題 39 の解析的導出): 任意の種類の向心力を仮定し，曲線図形の求積法を認めて，まっすぐに上昇または下降する物体の各場所における速度ならびに物体が任意の場所に達する時間を求めよ。またその逆。

式 (10)，(11) から dt を消去すると，

$$fdx = vdv$$

これより，

$$\int fdx = \frac{1}{2}v^2 \tag{12}$$

または

$$v = \sqrt{2\int fdx} \tag{13}$$

が得られる。式 (12) はエネルギー積分 (エネルギー保存則) となっているが，この時代では，まだこの重要性は認識されていない。

ある距離に到達する時刻を求めるには，式 (13) を用いて，

$$t = \int \frac{dx}{v} = \int \frac{dx}{\sqrt{2\int fdx}} \tag{14}$$

として求まる。

ニュートン (第 2 回テキスト pp.38-39 参照) が図式的に求めた v，t を、ヴァリニョンは解析的に求めた。

(プリンキピア命題 6 系 1 曲線運動と向心力 の別解)：与えられた軌道曲線から中心力を求める。

物体が点 C から中心力をうけて軌道 ALL' を動くとする。時間 dt 間に L から L' まで進んだとき，$\overline{LL'} = ds = vdt$ となる。また，$\overline{AC} = a$，$\overline{AH} = x$，$\overline{HC} = \overline{LC} = r$ とする。
位置 L において C へ向かう向心力 f の軌道 s 方向成分を f_s とするとき，

$$\frac{f}{f_s} = \frac{\overline{LR}}{\overline{LP}} = \frac{\overline{LL'}}{\overline{LR}} = \frac{ds}{dx}$$

となるので，

$$f = f_s \frac{ds}{dx}$$

である。ここで，$f_s = d^2s/dt^2$ であるから，

$$f = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{ds}{dr} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} \qquad (15)$$

が成立する。

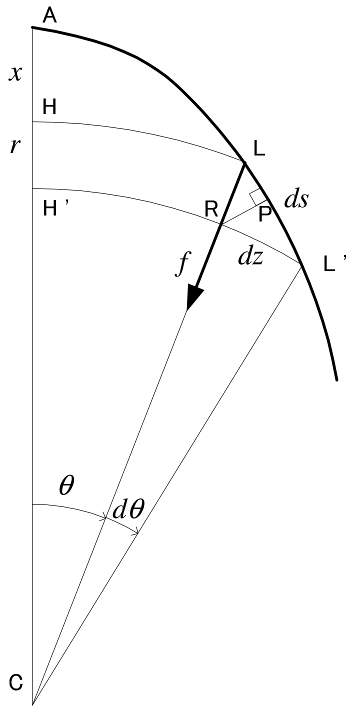


Fig. 6 曲線軌道の中心力

一方，面積速度定理より

$$rdz = 2hdt$$

より $dt = \frac{r}{2h}dz = \frac{r^2}{2h}d\theta$ となるので，

$$f = -\frac{ds}{dr}\left(\frac{2h}{r}\right)^2 \frac{d^2s}{dz^2} = -\frac{ds}{dr}\left(\frac{2h}{r^2}\right)^2 \frac{d^2s}{d\theta^2} \qquad (16)$$

となる。上の式 (15)、(16) から中心力 f を求めるには、$s(r)$、$s(t)$ または $s(\theta)$ が必要であり、この関係式がどれほど役立つかわからないが、ヴァリニョンは次の命題 11 の誘導で用いている。

ニュートンが中心力を図式的に求めた方法は**第 2 回テキスト p.30** 参照。

(プリンキピア命題 11(楕円運動の向心力) の別解)：物体が楕円上を周回する。この楕円の焦点に向かう向心力の法則を求めよ。

楕円の式は

$$\sqrt{a^2 - c^2}dr = \pm\sqrt{-a^2 + c^2 + 2ar - r^2}dz \tag{17}$$

と表すことができる*4。

楕円の短径 $b^2 = a^2 - c^2$ を用い，$dr^2 = ds^2 - dz^2$ と置き換えると,,

$$(bds)^2 = (2ar - r^2)(dz)^2$$

つまり，

$$\left(\frac{ds}{rdz}\right)^2 = \frac{2a}{b^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right) \tag{18}$$

面積速度 h を用いて $rdz = 2hdt$ と置き換えると，

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = (2h)^2\frac{2a}{b^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right) \tag{19}$$

両辺を微分すると

$$2\frac{ds}{dt}d\left(\frac{ds}{dt}\right) = 2\frac{ds}{dt}d\left(\frac{ds}{dt}\right) = 2\frac{d^2s}{dt^2}ds$$
$$= -(2h)^2\frac{2a}{b^2}\frac{1}{r^2}dr$$

これを式 (16) に用いると，

$$f = -\frac{d^2s}{dt^2}\frac{ds}{dr} = (2h)^2\frac{a}{b^2}\frac{1}{r^2} \tag{20}$$

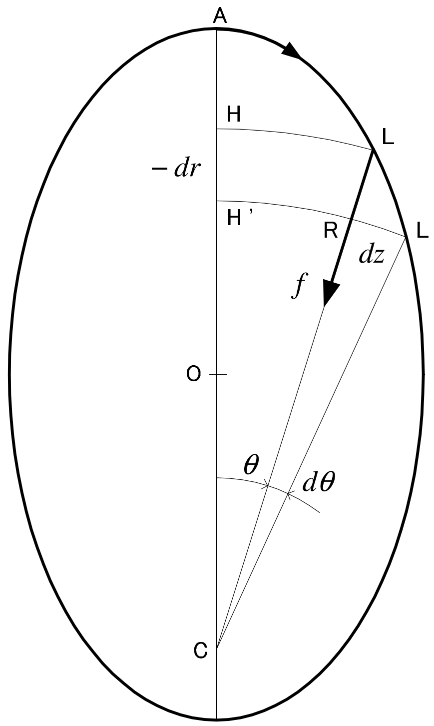


Fig. 7 楕円軌道の中心力

ニュートンが複雑な幾何学を用いて見出した距離の逆 2 乗則 (**第 2 回テキスト pp.32-33** 参照) は，ヴァリニョンにより解析的に導出された。

*4 ライプニッツの式 (5) と同様，どのように導いたのか不明である。後年，オイラーがこれらと同じ式 (35) を解析的に導いている。

1.3　ヘルマンと逆ニュートン問題

■ヘルマンの生涯　ヤコブ・ヘルマン (Jakob Hermann, 1678-1733) は古典力学の問題を扱った数学者である。初期の力学書 Phoronomia を著した。

ヘルマンはフランス・ドイツの国境に近い**スイスのバーゼル**で生まれ，バーゼルで死去した。最初，バーゼル大学で**ヤコブ・ベルヌーイ**のもとで学び，1695 年に学位を受けて卒業した。ヤコブ・ベルヌーイを介して**ライプニッツ**とも親しかった。

1701 年にベルリンアカデミーのメンバーになり、1707 年にパドヴァ大学 (イタリア) の数学主任に任命され、1713 年にフランクフルト・オーダー (ドイツ) へ移り、1724 年にサンクトペテルスブルグ (ロシア) アカデミーの高等数学を担当。1731 年にバーゼルへ戻って、倫理学と自然法を担当した。

後の**レオンハルト・オイラー**はヘルマンの遠い親戚 (オイラーの母がヘルマンのまたいとこ) にあたる [7]。

Fig. 8　Jakob Hermann

■**ヘルマンによる惑星運動の解**　.

ヘルマンとヨハン・ベルヌーイはそれぞれ独立に，惑星の運動方程式を解くことにより，ケプラーの惑星運動の法則を導くこと (**逆ニュートン問題**) を、はじめて行った。ヘルマンはデカルト座標をもとにして考え，ヨハン・ベルヌーイは極座標をもとにした。

Fig.9 において，力の中心 S を原点とし，x 軸，SJ を y 軸を図のように選ぶ。物体の軌道を仮に ABCD とし，時刻 $t-\Delta t$ で B 点，時刻 t で C 点 (x,y) に位置しており，時刻 $t+\Delta t$ では未知の点 D 点に位置するものとする。C 点における軌道の接線 LMCE を引き，B 点をとおって SC に平行な直線と接線との交点を M とし，接線上に $\overline{MC}=\overline{CE}$ となる点 E をとる。

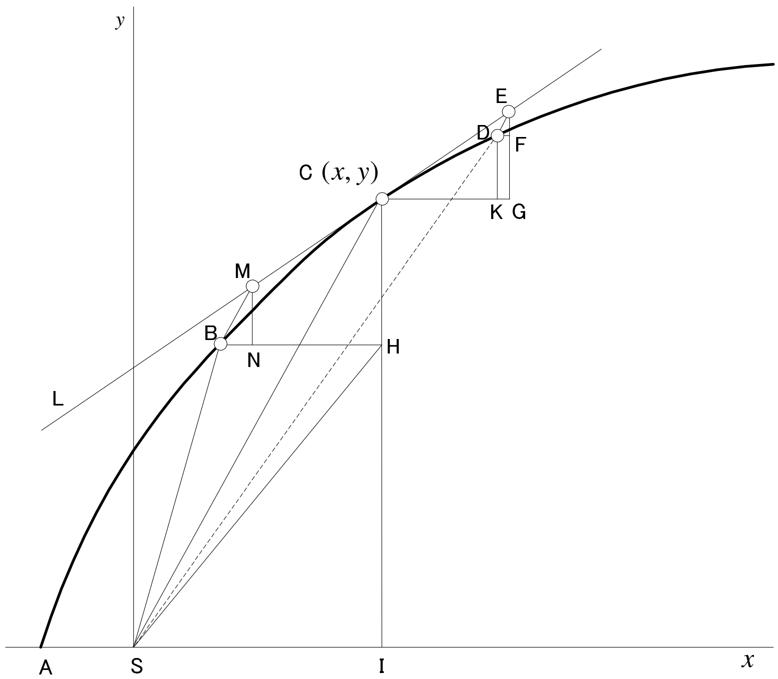


Fig. 9　ヘルマンの運動方程式

もし，CD 間の移動で中心力が働かなければ，物体は接線上を面積速度一定で移動するので，物体は時刻 $t+\Delta t$ では E へ移動する (面積を比較すると，$\triangle SBC=\triangle SMC=\triangle SCE$ である)。しかし，中心力が作用するために，中心 S 方向へ引かれるために $\overline{ED}$ だけ移動し，結果的に，時刻 $t\sim t+\Delta t$ の間に $\overline{CD}$ の移動をすると考えることができる。このとき，Δt が十分小さい極限では，中心力は CS 方向の一定値であると考えられるので，$\overline{MB}$ **と** $\overline{ED}$ **は平行で同一の長さ**となる。

ここで，見やすいように $\overline{SI}=x(t)$，$\overline{IC}=y(t)$，$\overline{BH}=dx(t)$，$\overline{CK}=dx(t+\Delta t)$，$\overline{HC}=dy(t)$ 等と表すことにする。

dx の増加量 (図では減少) は

$$d^2x=dx(t+\Delta t)-dx(t)=\overline{CK}-\overline{BH}=(\overline{CG}-\overline{KG})-(\overline{NH}+\overline{BN})=-(\overline{KG}+\overline{BN}) \tag{21}$$

となる。最後の等式では，$\overline{CG} = \overline{NH}$ の関係を用いた。

ここで、$\triangle DEF$ **と** $\triangle BMN$ **は合同**であり，**共に** $\triangle SCI$ **に相似**であるので，$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ として

$$\overline{KG} = \overline{BN} = \overline{ED} \times \frac{SI}{SC} = \overline{ED} \times \frac{x}{r}$$

となる。これを式 (21) に用いて

$$d^2x = -2\overline{ED} \times \frac{x}{r} \tag{22}$$

となる。

一方，S へ向かう中心力 $f(r)$ を

$$f = \frac{\kappa}{r^2}$$

と表すと、運動の第 2 法則より f による dt 間の移動量は，

$$\overline{ED} = \overline{MB} = \frac{1}{2} f \cdot (dt)^2 = \frac{\kappa}{2r^2}(dt)^2$$

となるので，d^2x について，次式を得る。

$$-d^2x = \frac{\kappa x}{r^3}(dt)^2 = \frac{\kappa x}{(x^2+y^2)^{3/2}}(dt)^2 \tag{23}$$

または、

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\kappa x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

となる。これが x **方向の運動方程式**である[*5]。

また，面積速度定理より

$$\begin{aligned} 2hdt = 2\triangle BSC &= 2(\triangle BHC + \triangle BSH - \triangle CSH) \\ &= dxdy + dx(y - dy) - xdy = ydx - xdy \end{aligned}$$

つまり、

$$dt = \frac{ydx - xdy}{2h}$$

となるので，この dt を式 (23) に用いると，軌道 $x(y)$ について，次の関係式が得られる。

$$-d^2x = \frac{\kappa}{(2h)^2} \cdot \frac{x(ydx - xdy)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \tag{24}$$

または、

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{\kappa}{(2h)^2} \cdot \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \left(y\frac{dx}{dy} - x \right)^2$$

これから**軌道** $x(y)$ **を求める**ことができる。

[*5] 同様にすれば，d^2y についても

$$-d^2y = \frac{\kappa y}{r^3}(dt)^2 = \frac{\kappa y}{(x^2+y^2)^{3/2}}(dt)^2$$

を導くこともできる。$\kappa/r^2 = f = F/m =$ (単位質量あたりの力) であり，$x/r = \cos\theta$，$y/r = \sin\theta$ であることを考慮すると，これらは デカルト座標の運動方程式 $F_x = md^2x/dt^2$，$F_y = md^2y/dt^2$ そのままである。

軌道を求める式 (24) において，

$$d\left(\frac{y}{r}\right) = d\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}dy - y\frac{2xdx+2ydy}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{x(xdy-ydx)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

であることを用いると，式 (24) は

$$-d^2x = -\frac{\kappa(ydx-xdy)}{(2h)^2}d\left(\frac{y}{r}\right)$$

となるので，$ydx - xdy = (2h)dt$ が一定であることを考慮して積分すると，

$$-dx = -\frac{\kappa(ydx-xdy)}{(2h)^2}\frac{y}{r} = -\frac{\kappa(ydx-xdy)}{(2h)^2}\frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}} \tag{25}$$

これを x^2 で割って，

$$-\frac{dx}{x^2} = -\frac{\kappa(ydx-xdy)}{(2h)^2}\frac{y}{x^2(x^2+y^2)^{1/2}}$$

再度，

$$d\left(\frac{r}{x}\right) = d\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\right) = \frac{x\frac{2xdx+2ydy}{2\sqrt{x^2+y^2}} - \sqrt{x^2+y^2}dx}{x^2} = \frac{y(xdy-ydx)}{x^2(x^2+y^2)^{1/2}}$$

であることを用いると，

$$-\frac{dx}{x^2} = \frac{\kappa}{(2h)^2}d\left(\frac{r}{x}\right)$$

となり，これを積分して

$$\frac{1}{x} + C = \frac{\kappa}{(2h)^2}\frac{r}{x} = \frac{\kappa}{(2h)^2}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$$

ここで，$\frac{\kappa}{(2h)^2} = a$，$Ca = e$ と置いて整理すると，**物体が描く曲線の式**は次式となる。

$$(1-e^2)x^2 - 2aex + y^2 = a^2 \tag{26}$$

この式は，

$$\begin{aligned} |e| < 1 &: \text{楕円} \\ |e| = 1 &: \text{放物線} \\ |e| > 1 &: \text{双曲線} \end{aligned}$$

を表している。

惑星の運動方程式の解は，式 (26) の楕円，放物線または双曲線である。

かくして、デカルト座標で惑星の運動方程式をもとに、引力の逆 2 乗則から惑星運動の軌道 (ケプラーの第 1 法則) が導かれた。

1.4 ヨハン・ベルヌーイと逆ニュートン問題

■ヨハン・ベルヌーイの生涯　ヨハン・ベルヌーイ (Johann Bernoulli，1667-1748) はスイス・**バーゼル**出身の数学者。フランス語読みでジャン・ベルヌーイ (Jean Bernoulli) と表記されることもある。

父親はバーゼル市の指導者であったニコラス・ベルヌーイ (1623-1708)。ヨハン・ベルヌーイは 10 番目の子である。ベルヌーイ家は 17 世紀から 18 世紀にかけて少なくとも 8 人の数学者を輩出した。
ヨハンは兄ヤコブとともに，ライプニッツの微積分法の発展に寄与した。ロピタルの定理として知られる微分の平均値の定理の発見者でもある。彼は他にも，重力場における粒子の運動に関する問題など，応用数学の様々な分野で多くの貢献を成した。さらに，1691 年に懸垂線 (catenary) の問題をホイヘンス，ライプニッツと同時期に独立に解決し、1691 年には指数関数の微積分法を確立した。
ヨハンはバーゼルで数学の教授職にあったヤコブより数学を学んだが，後には衝突が絶えなかった。ヤコブはヨハンが数学とバーゼルから離れるよう仕向けたが，ヨハンはバーゼルの代議士の娘であったドロテアと結婚し，義理の父親の口利きにより 1705 年にバーゼルでギリシア語の教授職に就き，ヤコブの死後，数学の教授職を得た。バーゼル生まれのレオンハルト・オイラー (1707-1783) や息子のダニエル・ベルヌーイはヨハンの弟子である。ダニエルとも、いさかいが絶えなかった [8]。

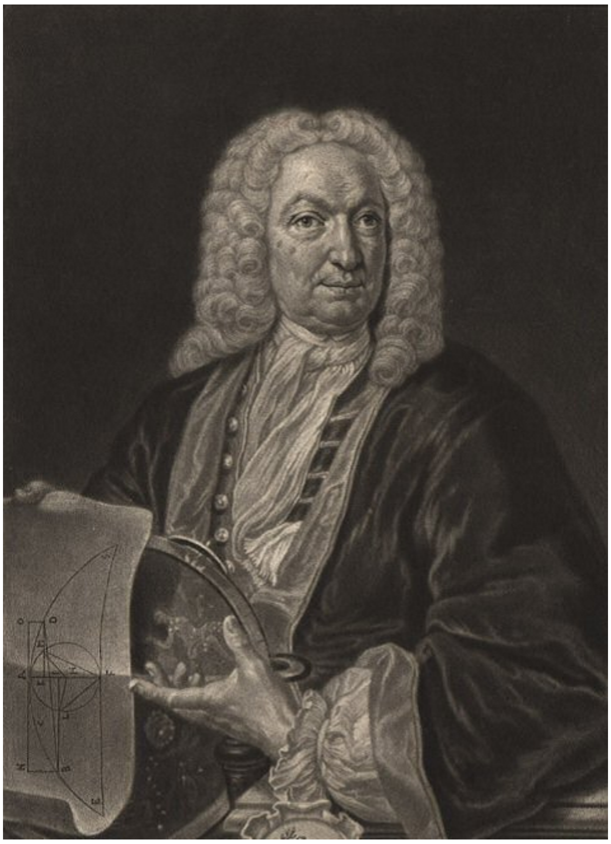


Fig. 10 Johann Bernoulli

Table 1　ベルヌーイ一族 [11]

初代	2 代	3 代	4 代
ニコラス (1623-1708)	**ヤコブ** (1654-1705)		
	ニコラス (1662-1716; 画家)	ニコラス (1687-1759; 数学)	
	ヨハン (1667-1748)	ニコラス (1695-1726; 数学) **ダニエル** (1700-1782) ヨハン (1710-1790; 数学，物理)	 ヨハン (1744-1807; 天文学) ヤコブ (1759-1789; 物理)

■ヨハン・ベルヌーイによる惑星問題の解　.

ヘルマンとヨハン・ベルヌーイは，惑星の運動方程式を解くことによりケプラーの惑星運動の法則を導くこと (逆ニュートン問題) を、はじめて行った。ヨハン・ベルヌーイは極座標をもとにした。

Fig.11 で O を力の中心とし，A から同じ速度で二つの物体が一方は直線 AO に沿って，他方は曲線 ABC に沿って動き始めたとする。それらが O から同じ距離 E と B に達したときには，両者の速度は等しく、それを v で表す。

まず，AO に沿う運動を考える。dt 間に物体が E から e へ進み，速度が v から $v+dv$ になったとすると，運動方程式

$$dv = fdt = f\frac{-dr}{v}$$

より，

$$fdr = -vdv = -d\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

これを積分して，

$$\int fdr = ab - \frac{1}{2}v^2$$

これより，E 点の速度は

$$v = \sqrt{2}\sqrt{ab - \int fdr}$$

となる (これは後のエネルギー保存則であり，ab が全力学的エネルギーを表している)。

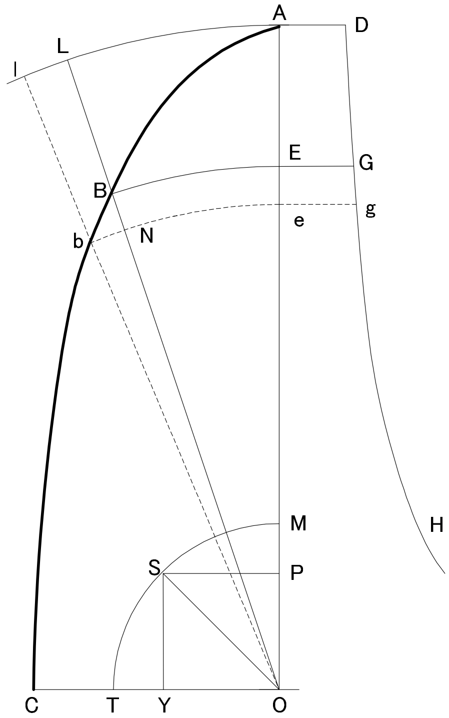


Fig. 11 極座標での惑星問題の解

$f = a^2g/r^2$ と表すと

$$\int fdr = -\frac{a^2g}{r}$$

であり，これを用いると半径 r における速度は

$$v = \sqrt{2}\sqrt{ab + \frac{a^2g}{r}}$$

となる。

次に，曲線 AB に沿う運動を考える。B 点での速度は上の v である。面積定理より $\angle AOB = \theta$ として，

$$(2h)dt = \overline{Nb} \times \overline{BO} = rd\theta \cdot r$$

したがって

$$vdt = \sqrt{2}\sqrt{ab + \frac{a^2g}{r}} \times \frac{r^2}{2h}d\theta = \overline{Bb} = \sqrt{dr^2 + r^2d\theta^2}$$

これより r と θ の間に次式 (**極座標形式の軌道の微分方程式**) が成立する。

$$d\theta = \frac{\pm acdr}{r\sqrt{abr^2 + a^2gr - a^2c^2}} \tag{27}$$

となる。ただし，$\sqrt{2}h \equiv ac$ と置き換えた。

つぎに軌道を求めるために，式 (27) を解くことを考える。$r = a^2/u$ と座標変換すると，$dr = -(a/u)^2 du$ であるから

$$d\theta = -\frac{\pm cdu}{\sqrt{a^3b + a^2gu - c^2u^2}} = -\frac{\pm cdu}{\sqrt{a^3b + \frac{a^4g^2}{4c^2} - c^2\left(\frac{a^2g}{2c^2} - u\right)^2}}$$

さらに $(a^2g/2c^2) - u \equiv \xi,\ a^3b + a^4g^2/4c^2 \equiv c^2A^2$ とおけば

$$d\theta = \frac{\pm d\xi}{\sqrt{A^2 - \xi^2}} = \frac{1}{A}\frac{\pm Ad\xi}{\sqrt{A^2 - \xi^2}}$$

$\xi = A\sin\alpha$ として積分すると

$$\theta + \theta_0 = \int \frac{\pm A\cos\alpha d\alpha}{A\sqrt{1 - \sin^2\alpha}} = \pm\alpha = \pm\sin^{-1}\left(\frac{\xi}{A}\right)$$

x 軸を適当に選べば $\theta_0 = 0$ となり，解は $\xi = A\sin\theta$ である。

つまり，元の r で書き直せば，**惑星が描く軌道**は

$$r = \frac{a^2}{(a^2g/2c^2) - A\sin\theta}$$

となる[*6]。

$\sin\theta = x/r,\ r = \sqrt{x^2 + y^2}$ であることを用いて，$x - y$ 座標で表すと，

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{a^2}{(a^2g/2c^2) - A(x/\sqrt{x^2 + y^2})}$$

書き換えると，**惑星が描く軌道**は次式となる。

$$\left\{1 - \left(\frac{2c^2A}{a^2g}\right)^2\right\}x^2 - 8\frac{c^4A}{a^2g^2}x + y^2 = \frac{4c^2}{g^2} \tag{28}$$

$$\begin{array}{llll} a^2g > 2c^2A & \text{or} & ab < 0 & :\text{楕円} \\ a^2g = 2c^2A & \text{or} & ab = 0 & :\text{放物線} \\ a^2g < 2c^2A & \text{or} & ab > 0 & :\text{双曲線} \end{array}$$

惑星の運動方程式の解は，式 (28) の楕円，放物線または双曲線である。

かくして，引力逆 2 乗則から Kepler の法則が導かれた。

[*6] θ_0 を適当に選べば，これは

$$r = \frac{a^2}{(a^2g/2c^2) + A\cos\theta} = \frac{2c^2/g}{1 + (2c^2A/a^2g)\cos\theta} = \frac{l}{1 + \epsilon\cos\theta}$$

となり，平面極座標での標準の円錐曲線の式となっている。

1.5 ダニエル・ベルヌーイとエネルギー保存則

■ダニエル・ベルヌーイの生涯　ダニエル・ベルヌーイ (Daniel Bernoulli, 1700-1782) はスイスの数学者・物理学者。オランダのフローニンゲンに，数学者ヨハン・ベルヌーイの息子として生まれ，郷里のスイス・**バーゼル**で育った。

ダニエルはベルヌーイ家の中では最も才能があり有望であった。そのためか彼と父との関係には緊張が絶えず，パリ大学の科学アカデミーのコンテストでは，ヨハンは自分の息子と比較されることに耐えられず，ダニエルに論文提出を禁止したという。ヨハンは，ダニエルの主著 Hydrodynamica を盗用し，Hydraulica と名を変えて発表しようとした。ダニエルの関係改善の努力もむなしく，父は死ぬまで息子を逆恨みしていた。

父親はが数学者になることを嫌っていたため，ダニエルは 1713 年からバーゼル大学の哲学と論理学を学び，その後バーゼル，ハイデルベルク，ストラスブールで医学を学び，1721 年に解剖学と植物学で博士号を取得した。1724 年にはペテルブルク科学アカデミーに数学教授として就任するが，1733 年に病気を口実に辞して，バーゼル大学の植物学・物理学教授となり，その死まで医学・形而上学・自然哲学を教えた。

Fig. 12 Daniel Bernoulli

初期の数学上の業績に，リッカチによって提出された微分方程式の解法がある。1738 年に出版された最も重要な著書は，『Hydrodynamica(流体力学)』である。水力学におけるベルヌーイの定理は，流線や渦線に沿ってベルヌーイ関数が保存されるという形に友人のオイラーが洗練して，今日の流体力学の基礎を築いた。潮汐に関する彼の論文は，オイラーとマクローリンとによる論文と合同でアカデミー・フランセーズに表彰された。3 人の論文は，ニュートンの『プリンキピア』出版とラプラスの業績までの間に，この主題について論議されたすべての問題を含んでいる。

また，ベルヌーイは弦の振動に関して微分方程式の解を三角関数で展開する方法で，振動弦の式を求めた。彼は気体運動論の先駆者であり，ボイル=シャルルの法則を分子運動から説明した [9][10]。

■ダニエル・ベルヌーイによるエネルギー積分 (力学的エネルギー保存則)　.

ダニエル・ベルヌーイはエネルギー積分を明示的に書き示し，その重要性を認めて積極的に利用した。

オイラーもエネルギー積分を使っているが，エネルギー積分の重要性を認めて，積極的に用いたのはダニエル・ベルヌーイが最初である。

Fig.13 において，楕円軌道の力の中心を C，C から物体 D までの距離を r とすると，惑星の速さ v は r だけの関数となる (プリンキピア命題 40)。D 点での速さ v_D は B 点での速さ v_B に等しくなる。仮に，A で静止していた惑星が C へ向かって落下するとしたら，

$$\frac{1}{2}v_D^2 = \frac{1}{2}v_B^2 = \frac{1}{2}v(r)^2 = -\int_A^B f(r)dr$$

が成り立つ。$f(r)$ は単位質量あたりの中心力の大きさで，

$$f(r) = \frac{\kappa}{r^2}$$

で表される。したがって $\overline{AC} = c$ と表して

$$\frac{1}{2}v(r)^2 = -\int_A^B \frac{\kappa}{r^2}dr = -\left[-\frac{\kappa}{r}\right]_c^r = \frac{\kappa}{r} - \frac{\kappa}{c} \qquad (29)$$

ただし，$c = \overline{AC}$ の値は未知であるが，面積定理から $v_E r_E = v_F r_F$ つまり，$v_E^2 r_E^2 = v_F^2 r_F^2$ となり，これに式 (29) の関係を用いて，

$$2\left(\frac{\kappa}{r_E} - \frac{\kappa}{c}\right) r_E^2 = 2\left(\frac{\kappa}{r_F} - \frac{\kappa}{c}\right) r_F^2$$

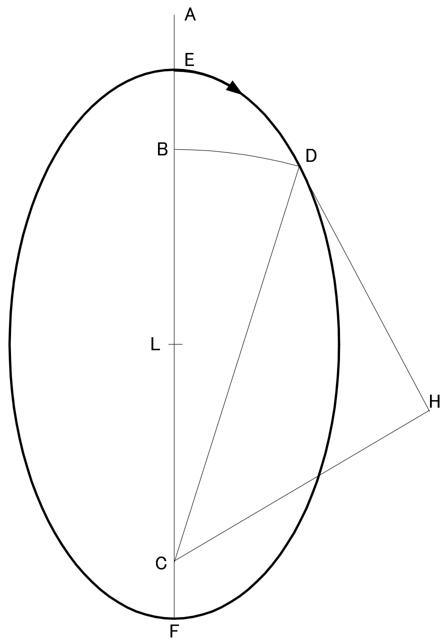


Fig. 13　楕円軌道のエネルギー

これより

$$c = r_E + r_F = 2 \times (\text{長半径}) = 2a$$

が得られるので，式 (31) の c を $2a$ で置き換えて整理すると，次式が得られる。

$$\frac{1}{2}\{v(r)\}^2 - \frac{\kappa}{r} = -\frac{\kappa}{2a}$$

または、質量 m をかけて，次式の**エネルギー保存則**が得られる。

$$\frac{1}{2}m\{v(r)\}^2 - \frac{m\kappa}{r} = -\frac{m\kappa}{2a} = \text{const.} \qquad (30)$$

左辺第 2 項 $-m\kappa/r$ は**中心力によるポテンシャルエネルギー**である。

速度 $v(r)$ は次式から求まる。

$$v(r) = \sqrt{2\left(\frac{\kappa}{r} - \frac{\kappa}{2a}\right)} \qquad (31)$$

1.6　オイラーによる逆ニュートン問題の完結

■オイラーの生涯　レオンハルト・オイラー (Leonhard Euler, 1707-1783) は数学者・物理学者であり，スイスの**バーゼル**に生まれ，現在のロシアのサンクトペテルブルクにて死去した。バーゼル大学でダニエル・ベルヌーイと共に彼の父である**ヨハン・ベルヌーイ**のもとで学んだ。1727 年に，ヘルマンの後任として**サンクトペテルブルク**の科学アカデミーに赴任し，この地で，彼はバーゼル問題 ($\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2) = \pi/6$) を解決したことで有名になった。だが，エカテリーナ 1 世の死でロシアは政情不安となり，視力の悪化も伴って，研究生活は不安定なものとなった。1741 年，プロイセン王国のフリードリヒ 2 世の依頼で**ベルリン・アカデミー**の数学部門長としてドイツへ移住した。

その後，エカテリーナ 2 世が帝位についたことで，1766 年ごろオイラーは再びサンクトペテルブルクに戻った。1738 年ごろより視力が低下し，1771 年ごろには両目を完全に失明したものの，その後も研究意欲が衰えることはなく，彼は論文の執筆を口述筆記に頼りながら，1783 年に 76 歳で亡くなるその日まで精力的な研究生活を続けた。

サンクトペテルブルグ，ベルリン時代を通じて，**膨大な論文，著書**を発表した。数学の整数論・代数学や幾何学に関連する領域で多くの貢献があり，今日使われている数学記号の多くが彼に由来している。和の記号 Σ，虚数単位 i，自然対数の底 e，オイラーの公式 $e^{i\pi} = -1$，関数概念 $f(x)$，等々。

オイラーの解析学の威力は，特に**力学の分野**で発揮され，天体力学の近代化，力学原理の整備，剛体の力学，流体力学など多岐に及ぶ [12]，[13]。

Fig. 14 Leonhard Euler

オイラーはニュートン以降ラグランジュに至る 1 世紀間に力学理論の発展に最も多くの貢献をした。純粋数学は言うに及ばず，力学に関しても，解析学の適用による天体力学の近代化，力学原理の論理的・形式的整備，変分原理への橋渡し等々に及んでいる。

■オイラーによる楕円の方程式 .

オイラーは，惑星の楕円軌道を極座標形式で解析的に表現した。

オイラーは 1734 年の「惑星の運動と軌道決定」で楕円軌道を極座標形式 (現在の形と同一) で与えた。

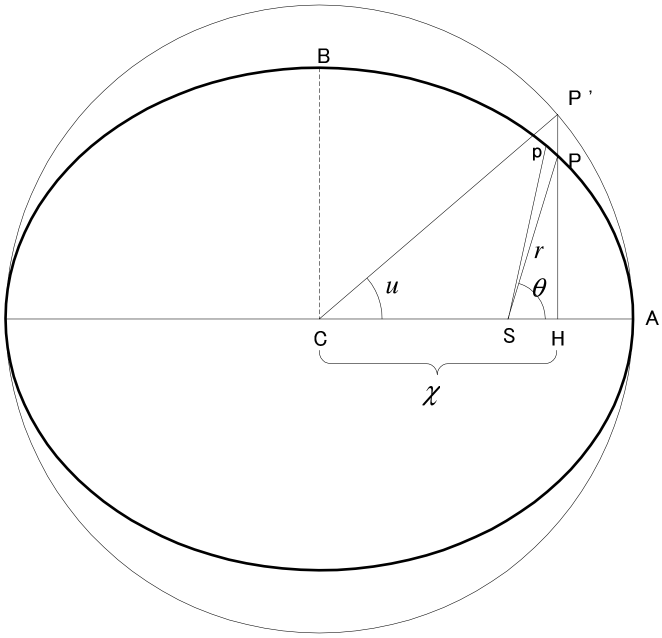


Fig. 15 楕円軌道の式

Fig.15 において，楕円の中心を C，焦点 (太陽) を S, 惑星を P，長径を $\overline{CA}=a$，短径を $\overline{CB}=b$，離心率を $e=\sqrt{a^2-b^2}/a$ とすると，$b=a\sqrt{1-e^2}$，$\overline{CS}=c=ae$ である。図より，

$$\overline{PH}=(b/a)\overline{P'H}=\sqrt{1-e^2}\sqrt{a^2-\chi^2}$$
$$\overline{SH}=\overline{CH}-\overline{CS}=\chi-ae$$

したがって

$$r=\overline{SP}=\sqrt{\overline{PH}^2+\overline{SH}^2}=a-e\chi \tag{32}$$

また，$\chi=\overline{CS}+\overline{SH}=ae+r\cos\theta$ であるので

$$r=a-e(ae+r\cos\theta)$$

つまり，**極座標で表した楕円の式**は次式となる。

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \tag{33}$$

この式を用いたのはオイラーが最初である。

Fig.15 の関係を用いて、オイラーは楕円軌道における $d\theta$ と dr の関係式を，解析的な方法で導いた。

惑星はケプラーの面積定理にしたがって移動するので，微小時間 dt 内に P が p まで移動したとすると，

$$r^2 d\theta = 2(\text{面積 } PSp) = 2d(\text{面積 } ASP) = 2hdt \tag{34}$$

の関係がある。ここで，

$$(\text{面積 } ASP) = \frac{1}{2}\overline{SH} \times \overline{PH} + \int_{\chi}^{a} \overline{PH} d\chi = \frac{1}{2}(\chi - ae)\sqrt{1-e^2}\sqrt{a^2-\chi^2} + \int_{\chi}^{a} \sqrt{1-e^2}\sqrt{a^2-\chi^2} d\chi$$

であるので，

$$\begin{aligned} d(\text{面積 } ASP) &= \frac{1}{2}d\left\{(\chi - ae)\sqrt{1-e^2}\sqrt{a^2-\chi^2}\right\} - \sqrt{1-e^2}\sqrt{a^2-\chi^2} d\chi \\ &= -\frac{1}{2}a(a - e\chi)\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a^2-\chi^2}} d\chi \end{aligned}$$

これより式 (34) の関係は次式となる。

$$r^2 d\theta = -a(a - e\chi)\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a^2-\chi^2}} d\chi$$

$r = a - e\chi$ を用いて r で書き換えて，次の**ケプラー運動の関係式**を得る。

$$d\theta = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{r\sqrt{(ae)^2 - (a-r)^2}} dr = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{r\sqrt{c^2-(a-r)^2}} dr \tag{35}$$

または

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{r\sqrt{c^2-(a-r)^2}}$$

これはライプニッツの式 (5) やヴァリニョンの式 (17) に一致している。**かれらが複雑な (恐らく幾何学的な) やり方で導いた楕円軌道の $d\theta$ と dr の関係式を，オイラーは解析的な方法で導いた。**

■極座標による運動方程式　.

オイラーは，惑星の運動方程式を極座標形式で求めて解いた。

オイラーは 1744 年の「惑星と彗星の運動の理論」と 1747 年の「天体の運動一般の研究」で，惑星の運動方程式を立て，それを解いて軌道を求めるという**現代と同じ力学の方法**を**体系的に**用いている[*7]。

デカルト座標で運動方程式は次のように表される。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

力 (X, Y, Z) が中心力の場合, 力の中心を原点とすると $X = -Fx/r$、$Y = -Fy/r$、$Z = 0$ であり、$F = mf(r)$ と表すと、運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{r}f, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{r}f$$

となる。

これを 2 次元極座標で表すために,

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

と置き換える。この 1 階微分は $(dx/dt) = (dr/dt)\cos\theta - r(d\theta/dt)\sin\theta$、$(dy/dt) = (dr/dt)\sin\theta + r(d\theta/dt)\cos\theta$ であり、2 階微分は次式となる。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\cos\theta - 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\sin\theta - r\frac{d^2\theta}{dt^2}\sin\theta - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\cos\theta$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\sin\theta + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\cos\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\cos\theta - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\sin\theta$$

このとき，運動方程式は次式のようになる。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\cos\theta - \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\sin\theta = -f\cos\theta \tag{36}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\sin\theta + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\cos\theta = -f\sin\theta \tag{37}$$

式 (36) $\times \cos\theta +$ 式 (37) $\times \sin\theta$ より

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -f \qquad\qquad (\text{半径方向}) \tag{38}$$

または，式 (36) $\times (-\sin\theta) +$ 式 (37) $\times \cos\theta$ より

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0 \qquad\qquad (\text{周方向}) \tag{39}$$

上の 2 式は **極座標で表した運動方程式**であり、式 (38) は半径方向の、式 (39) は周方向の運動方程式である。

[*7] ここでは微分記号等を現代風に変えて示す。

■**運動方程式の積分**　.

2 次元極座標の運動方程式 (38), (39) を解くには次のようにすればよい。

周方向の運動方程式 (39) に r をかけて変形すると,

$$r^2\frac{d^2\theta}{dt^2}+2r\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}=\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0$$

つまり,

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=A=\text{const.} \tag{40}$$

これは面積速度が一定となること (**ケプラーの第 2 法則**) を表している。ヘルマンやヨハン・ベルヌーイらは、面積速度一定則を用いて解を求めたが、これは運動方程式の解として求まることをオイラーは示したことになる。

式 (40) を半径方向の式 (38) に用いて、

$$\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{A^2}{r^3}=-f$$

dr をかけて 積分すると、左辺 1 項目は

$$\int\frac{d^2r}{dt^2}dr=\int\frac{d^2r}{dt^2}\frac{dr}{dt}dt=\int\left(\frac{dr}{dt}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right)dt=\int\left(\frac{dr}{dt}\right)d\left(\frac{dr}{dt}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

となることを用いて、

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{A^2}{r^2}=-\int^r fdr+E \tag{41}$$

となる[*8]。

力 f は r だけの関数であるので、$U=\int^r f(r)dr$ と表すと, U も r だけの関数であり、式 (41) より、

$$\frac{dr}{dt}=\sqrt{2E-\frac{A^2}{r^2}-2U}$$

または、変数分離して、

$$dt=\frac{dr}{\sqrt{2E-\frac{A^2}{r^2}-2U}}=\frac{rdr}{\sqrt{2(E-U)r^2-A^2}} \tag{42}$$

が得られる。

また, 式 (40) より θ の変化量は、

$$d\theta=\frac{A}{r^2}dt=\frac{Adr}{r\sqrt{2(E-U)r^2-A^2}} \tag{43}$$

となる。

---

*8　式 (41) は (40) を用いて書き直すと

$$E=\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{A^2}{r^2}+\int^r fdr=\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\int^r fdr$$

であるので, E は単位質量あたりの**全エネルギー**を表している。右辺第 1 項と第 2 項が半径方向と周方向の速度エネルギーを表し、第 3 項は引力 f によるポテンシャルエネルギーを表す (積分の始点を $r=+\infty$ とすると第 3 項は負の値であり、楕円運動の場合は $E<0$ となる)。

■距離の逆 2 乗則に従う引力のもとでの運動 .

式 (42)、(43) を具体的に**惑星の運動**に適用する。逆 2 乗則に従って、

$$f(r) = \frac{\kappa}{r^2} \tag{44}$$

と表すと，r の関数 U は、$r \to \infty$ で $U = 0$ として、

$$U = \int_{+\infty}^{r} f dr = \int_{+\infty}^{r} \frac{\kappa}{r^2} dr = -\frac{\kappa}{r}$$

となる。これを式 (42) に用いて

$$dt = \frac{r dr}{\sqrt{2Er^2 + 2\kappa r - A^2}} \tag{45}$$

ここで，根号内が正であることより

$$2Er^2 + 2\kappa r - A^2 = 2E\left\{\left(r + \frac{\kappa}{2E}\right)^2 - \frac{\kappa^2 + 2EA^2}{4E^2}\right\} \geq 0$$

でなければならず、$E < 0$ であることを考慮すると，物体の運動範囲は

$$\left|r + \frac{\kappa}{2E}\right| \leq \sqrt{\frac{\kappa^2 + 2EA^2}{4E^2}} = \frac{\kappa}{2|E|}\sqrt{1 - \frac{2|E|A^2}{\kappa^2}}$$

となる。

ここで,

$$a = -\frac{\kappa}{2E} = \frac{\kappa}{2|E|}, \qquad e = \sqrt{1 - \frac{2|E|A^2}{\kappa^2}} \tag{46}$$

と置き換えると、物体の運動範囲は $|r - a| \leq ae$、つまり

$$a(1 - e) \leq r \leq a(1 + e)$$

となり[*9]、式 (45) は

$$dt = \frac{r dr}{\sqrt{2|E|\{(ae)^2 - (r - a)^2\}}}$$

となる。

さらに

$$r - a = -ae\cos u \tag{47}$$

と置き換えて ($dr = ae\sin u \, du$)、r を u に座標変換すると、次式となる。

$$dt = \frac{1}{\sqrt{|2E|}} a(1 - e\cos u) du$$

$t = 0$ で $u = 0$(近日点) としてこれを積分すると，次式が得られる。

$$t = \frac{a}{\sqrt{|2E|}}(u - e\sin u) = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\kappa}}(u - e\sin u) \qquad (\textbf{ケプラー方程式}) \tag{48}$$

[*9] a が楕円の長径，e が離心率に対応している。

一方，式 (43) に同様の置き換えを行い、κ, A, r に代えて a, e, u で表すと、次式となる。

$$d\theta = \frac{Adr}{r\sqrt{2Er^2 + 2\kappa r - A^2}} = \frac{a\sqrt{2|E|(1-e^2)}ae\sin u}{a(1-e\cos u)\sqrt{2|E|}ae\sin u}du = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos u}du \tag{49}$$

この解は、積分公式[*10]によると

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin u}{1-e\cos u}$$

となる。または、書き換えて

$$\cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta} = \frac{\cos u - e}{1-e\cos u} \tag{50}$$

となる[*11]。

t が与えられると，式 (48) より u が求まり，式 (47)、(50) より r、θ が求まる。

式 (50) を書き換えると、

$$\cos u = \frac{e+\cos\theta}{1+e\cos\theta}$$

これを (47) へ用いると

$$r = a\left(1 - e\frac{e+\cos\theta}{1+e\cos\theta}\right) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \tag{51}$$

となる。$e < 1$ の時、これは、以前にオイラー自身が導いた楕円の式 (33) であり、惑星が楕円軌道を描くこと (**ケプラーの第 1 法則**) が導かれた。

また、式 (48) より r は u の周期関数であり、その周期は 2π である。式 (48) より、u の 2π の増加は t の $2\pi\frac{a^{3/2}}{\sqrt{\kappa}}$ に対応する[*12] ので、この楕円軌道の周期は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\frac{a^{3/2}}{\sqrt{\kappa}}$$

であり、長半径の 3/2 乗に比例する (**ケプラーの第 3 法則**)。

---

*10

$$I = \int\frac{dx}{b\cos x + c} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{c^2-b^2}}\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{c^2-b^2}\sin x}{b\cos x+c}\right) & (b^2 < c^2) \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-c^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2-c^2}\sin x + c\cos x + b}{b\cos x + c}\right| & (b^2 > c^2) \end{cases}$$

*11 $\theta = 0$ で $u = 0$、$\theta > 0$ で $u > 0$ となるように符号を決めた。オイラーは直接 (50) を与えている。

*12 式 (48) で、任意の $u = u_0$ に対応する t の値を t_0 とする。

$$t_0 = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\kappa}}(u_0 - e\sin u_0)$$

$u = u_1 = u_0 + 2\pi$ のときの t の値 t_1 は

$$t_1 = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\kappa}}[u_0 + 2\pi - e\sin(u_0+2\pi)] = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\kappa}}(u_0 + 2\pi - e\sin u_0) = t_0 + 2\pi\frac{a^{3/2}}{\sqrt{\kappa}}$$

2　地上の拘束運動

少し時代をさかのぼって，ヤコブ・ベルヌーイまで戻る。

2.1　ヤコブ・ベルヌーイと複合振子

■ヤコブ・ベルヌーイの生涯　ヤコブ・ベルヌーイ (Jakob Bernoulli，1654-1705) は，ジャック・ベルヌーイとしても知られるスイスの数学者・科学者である。ヨハン・ベルヌーイの兄であり，スイスの**バーゼル**で生まれた。
1676 年に英国に旅した折に**ロバート・ボイル**と**ロバート・フック**に会い，その後，科学と数学の研究に一生を捧げることになった。

1682 年からはバーゼル大学で教鞭をとり，1687 年には同大学の数学の教授に就任する。彼は，**ゴットフリート・ライプニッツ**と交流をもち，ライプニッツから微積分を学び，弟のヨハンとも共同研究を行った。彼の初期の業績である『超越曲線 (1696)』と『isoperimetry (1700, 1701)』はこの共同作業がもたらした成果である。

『Ars Conjectandi, Opus Posthumum (推測法, 1713)』は，彼の確率論の偉大な貢献である。ベルヌーイ試行とベルヌーイ数はこの著作から，彼の功績を記念して名づけられた [14]。

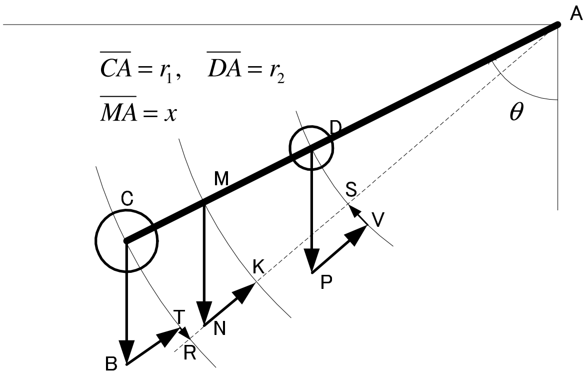
Fig. 16 Jakob Bernoulli

> ヤコブ・ベルヌーイは拘束運動の扱い方の先鞭をつけた。

■複合振子の振動周期 .

> 重り C，D が軽い剛体棒 CDA につながれ，A を中心にして紙面内で振動するとき，それと同じ周期の単一の振子の長さを求めること。

重り C，D の質量を m_1, m_2，振子の長さを $\overline{CA} = r_1$，$\overline{DA} = r_2$ とする。また，**等価な単一振子**の長さを $\overline{MA} = x$ とする。Fig.17 のように，各重りの運動を，**重力による運動**と**回転中心へ向かう運動**と**回転円周方向へ向かう運動**とに分ける。



	重力による運動	回転中心への運動	円周方向への運動
重り 1	$\overline{CB}$	$\overline{BT}$	$\overline{TR}$
等価重り	$\overline{MN}$	$\overline{NK}$	——
重り 2	$\overline{DP}$	$\overline{PV}$	$\overline{VS}$

Fig. 17 複合振子と相当単振子

重力が各重りの速度につけ加える衝撃 (加速度または単位質量あたりの力に同じ) は皆等しい。

$$\overline{CB}=\overline{MN}=\overline{DP}$$

$\triangle CBT \equiv \triangle MNK \equiv \triangle DPV$ であるから，

$$\overline{CT}=\overline{MK}=\overline{DV}$$

しかるに，重りの移動量は $\overline{CR}:\overline{MK}:\overline{DS}$ とならねばならないので，棒 CDA により，重り C は $\overline{TR}$ だけ下へ押され，重り D は $\overline{VS}$ だけ上へ引き上げられる (この線分の長さは加速度または単位質量あたりの力を示す)。これら線分の長さは，図より次式のように表すことができる。

$$\overline{TR}=\overline{CR}-\overline{CT}=\overline{MK}\frac{r_1}{x}-\overline{MK}=\overline{MK}\left(\frac{r_1}{x}-1\right)$$
$$\overline{VS}=\overline{DV}-\overline{DS}=\overline{MK}-\overline{MK}\frac{r_2}{x}=\overline{MK}\left(1-\frac{r_2}{x}\right)$$

一方，てこの原理より，

$$m_1\overline{TR}\times r_1=m_2\overline{VS}\times r_2$$

したがって，

$$m_1\overline{MK}\left(\frac{r_1}{x}-1\right)r_1=m_2\overline{MK}\left(1-\frac{r_2}{x}\right)r_2$$

これより，等価長さ x は次式となる。

$$x=\frac{m_1{r_1}^2+m_2{r_2}^2}{m_1r_1+m_2r_2}$$

外力の一部が未知の拘束力により打ち消されているとき，その結果としての実際の運動を**自由運動**と**拘束力により打ち消された運動**との重ね合わせと考え，**後者を系全体のつり合いの条件を用いて消去**するという方法を用いることができる。これは，後年、ダランベールが一般化する方法の先取りとなった。

2.2　ダニエル・ベルヌーイによる拘束運動の扱い

ダニエル・ベルヌーイは，ヤコブ・ベルヌイーの方法をより緩やかな拘束のもとでの運動へ拡張した。

■水平面上を自由に動く斜面上の小物体の落下　ヤコブ・ベルヌーイの複合振子 (剛体振子) では 2 個の質点は相対位置を変えないが，複数の質点が自由に曲がる紐で結ばれている場合は互いの相対位置がある程度自由に (ただし質点間距離は不変で) 変化する。ダニエル・ベルヌーイは，紐でつながれた二重振子を例に，非剛体的な拘束の場合について同様の取り扱いをしている。しかし，極めて複雑となっているので，ここでは二重振子は割愛し，水平面上を自由に動く斜面上の小物体の落下について説明する [1]。

Fig.18 に示すように，水平面上を自由に滑って動く質量 M の氷の斜面上を，質量 m の小物体が滑り落ちる。このときの斜面および小物体の運動を求める。ただし，摩擦力はいっさい働かないとする。

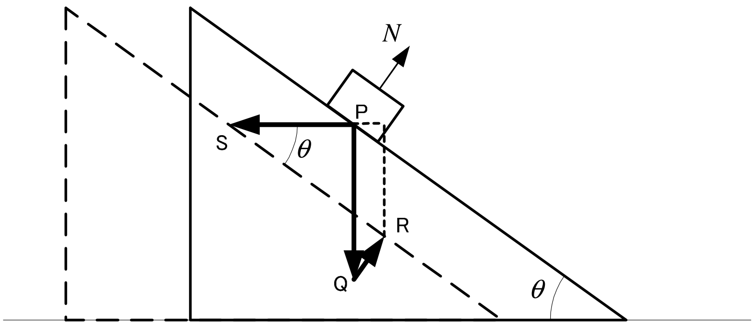


Fig. 18　水平面上を自由に動く斜面上の小物体の落下

斜面と小物体間の拘束がないとすると，斜面は静止したままで，小物体は時間 Δt 間に

$$\overline{PQ} = \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 \tag{52}$$

だけ落下する。

斜面と小物体が接触しているとの拘束条件を満たすには，小物体は斜面から斜面に垂直に N の抗力を受けて，

$$\overline{QR} = \frac{1}{2}\frac{N}{m}(\Delta t)^2 \tag{53}$$

だけ力の方向へ戻され，また，斜面には N の力が逆向きの作用し，その水平成分 $N\sin\theta$ により水平左方に

$$\overline{PS} = \frac{1}{2}\frac{N\sin\theta}{M}(\Delta t)^2 = \frac{m}{M}\sin\theta\overline{QR} \tag{54}$$

だけ移動する。式 (53) と (54) から N を消去すると

$$\frac{\overline{QR}}{\overline{PS}} = \frac{M}{m\sin\theta} \tag{55}$$

を満たす必要がある。

また，小物体が斜面に接触し続けるには，幾何学的条件から次式を満たさねばならない。

$$\tan\theta = \frac{\overline{PQ} - \overline{QR}\cos\theta}{\overline{PS} + \overline{QR}\sin\theta} \tag{56}$$

式 (55) と (56) より $\overline{QR}$ と $\overline{QR}$ を求めて，$\overline{PQ}$ に式 (52) を用いると，次式がえられる。

$$\overline{PS} = \frac{m\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}\overline{PQ} = \frac{m\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}\frac{1}{2}g(\Delta t)^2 \tag{57}$$

$$\overline{QR} = \frac{M\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}\overline{PQ} = \frac{M\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}\frac{1}{2}g(\Delta t)^2 \tag{58}$$

また，式 (53) に用いて，

$$N = \frac{m\overline{QR}}{\frac{1}{2}(\Delta t)^2} = \frac{Mm\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}g \tag{59}$$

が得られる。

斜面の加速度を a_M として $\overline{PS} = (1/2)a_M(\Delta t)^2$ と表すと，式 (57) より

$$a_M = \frac{m\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}g \tag{60}$$

が得られる[*13]。

[*13] 比較のために，この例に対する現代的な解法を例示すると，以下のようになる。

斜面の水平方向移動量を左向きに X，斜面に沿う小物体の相対的な移動量を斜面に沿って s とすると，小物体の絶対座標 (x, y) は

$$x = -X + s\cos\theta, \qquad y = -s\sin\theta$$

このとき，小物体の運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\left(-\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{d^2s}{dt^2}\cos\theta\right) = N\sin\theta, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = -m\frac{d^2s}{dt^2}\sin\theta = N\cos\theta - mg$$

一方，斜面の水平方向の運動方程式は，

$$-M\frac{d^2X}{dt^2} = -N\sin\theta$$

となり，この N を上の 2 式に用いて，

$$(M+m)\frac{d^2X}{dt^2} - m\frac{d^2s}{dt^2}\cos\theta = 0, \qquad M\frac{d^2X}{dt^2}\cos\theta + m\frac{d^2s}{dt^2}\sin^2\theta = mg\sin\theta$$

これより，加速度および拘束力 N は

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{m\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}g, \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{(M+m)\sin\theta}{M + m\sin^2\theta}g, \qquad N = \frac{Mm\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}g$$

のように求まる。

2.3　オイラーによるニュートン力学の確立

■オイラーによる力学原理　.

18 世紀のヨーロッパにおいて，力学の統一的な基礎は確立されていなかった。力学の問題を扱うには，数学者ごとに異なる方法が用いられ，各人が自分なりのやり方で問題を解いていた。オイラーは，**問題に共通した力学原理**を確定しようとした。

オイラーは数学，力学の分野を中心に膨大な数の論文，著書を発表したが，そのうち，力学原理に関する主要な著作を挙げると：

(1)「力学：解析学的に示された運動の科学」(1736 年)；以下「力学」
(2)「天体の運動一般の研究」(1747 年)；以下「研究」
(3)「力学の新しい原理の発見」(1750 年)；以下「発見」
(4)「自然哲学序説」(1745-50 年頃起草，死後 1844 年発表)；以下「序説」

「力学」の序文の中でオイラーは，ニュートンやヘルマンの著述が難解で，その解法を類似の他の問題にさえ応用困難である原因は，その**幾何学的な記述に原因がある**と考えた。そして，これを解決するためには，**力学の解析化** (微積分を用いた現在の方法) が必要であると考えた。

オイラーは力学の原理を**運動方程式**に求めた。

直線運動に対して，**力と運動が一致する場合**のすべての法則を含んだ関係式として

$$mdu = Fdt$$

を挙げている (記述は現代風に変更した。以下同様)。

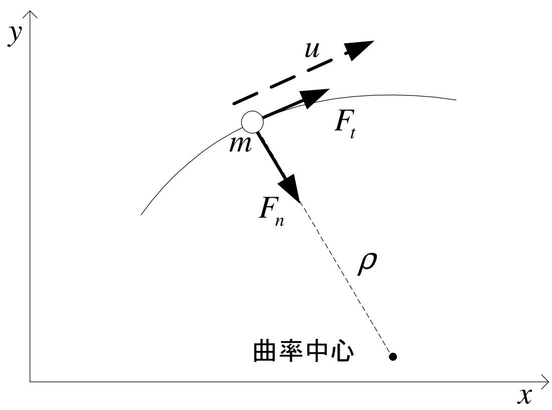


Fig. 19　曲線運動

また，**一般の曲線運動**に対して，接線方向および法線方向の関係式として，

$$mdu = F_t dt, \qquad m\frac{u^2}{\rho} = F_n$$

が基礎となると考えた。

オイラーは力学を最終的に下記のように応用することを考えていた [1]。

(1) 無限に小さくて点と見なすことのできる物体を調べる (**質点の力学**)。
(2) 有限の大きさを持ちその形を変えない剛体に着目する (**剛体の力学**)。
(3) 柔軟な物体を論ずる (**変形**)。
(4) 伸縮可能なものに取りかかる (**変形する物体の力学**)。
(5) 互いに作用を及ぼしあっているばらばらの複数個の物体を調べる (**質点系の力学**)。
(6) 流体の運動を調べる (**流体の力学**)。

これらを扱う上で、力学の**すべての原理を包含する唯一の公式**は下記であるとしている。

$$m\ d^2x = F_x\ dt^2, \qquad m\ d^2y = F_y\ dt^2, \qquad m\ d^2z = F_z\ dt^2$$

これは、3 次元 (デカルト座標) の運動方程式である。

オイラーは，次のように考えている。

(1) 運動方程式を微小だが有限の時間変化でなく，瞬間的な速度変化 $du = d(dx/dt)$ 等 (**微分量**) で与えるべき。
(2) 力，加速度は 3 次元のベクトル量であり，運動方程式は**ベクトルの方程式**である。
(3) 物体の構成要素である**すべての質点に対して運動方程式が成り立ち**，このことが，質点，剛体，弾性体，流体を問わず全ての物体に対する力学原理である。

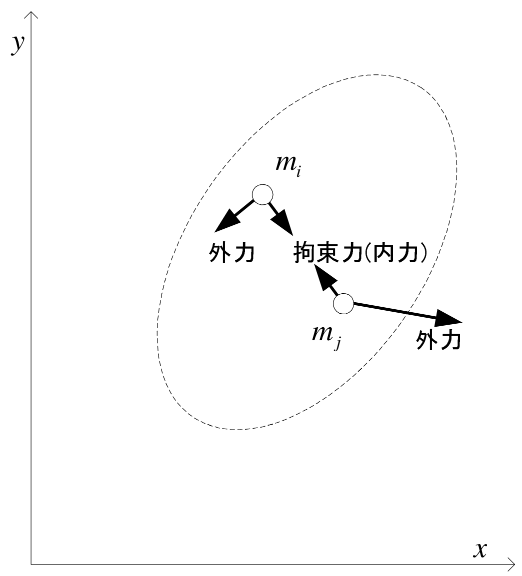


Fig. 20 質点系，剛体，連続体の運動

質点力学をもとに拘束条件を組み合わせて，質点系，剛体，連続体の力学へ拡張する**現代の力学**は，このときオイラーによって方向づけられ，この後，ラグランジュに受け継がれて，確立することとなる。

■「力」の尺度問題の解決 .

オイラーは，**「運動する物体の持つ力」論争**に終止符を打った。。

ニュートンを含めて，17,18 世紀では「力」には二つの意味が混在していた。一つは外部から加えられる**駆動力としての力**であり，現在の意味の力である。もう一つは，**物体に内在する力**としての慣性力，つまり状態を維持しようとする力である。後者の「運動する物体の持つ力の尺度」について，**デカルト派** (mu 説) と**ライプニッツ派** (mu^2 説) の間で長年にわたって論争が繰り返されてきた。

オイラーは「序説」の中で，次のように指摘している [1]。

「運動している物体は，この物体が静止していたとして，それに運動を与えるのに必要とされたのと同じ力を同じ間だけ逆向きに作用させたならば，再び静止にもたらすことができる。それゆえ二つの異なる物体を同一の時間に静止に持っていこうとするならば，必要な力は mu すなわち運動量に比例する。しかし，その同じ物体を同じ時間ではなく同じ距離を通過させることで静止させようとするならば，力は mu^2 に比例しなければならない。ここに両者の論争の根拠がある。しかし，運動する物体に何らかの固有の力を付加しようとするところに明らかに誤りがある。」

(1) 質量 m で速度 u の物体に力 F を逆向きに加えて静止させるとき，時間 Δt 間で静止させようとすると

$$F \times \Delta t = mu$$

となるが,

(2) この間の移動距離 $\Delta s = (1/2)u\Delta t$ の間に静止させようとすると,

$$F \times \Delta s = F \times \left(\frac{1}{2}u\Delta t\right) = \frac{1}{2}u \times (F\Delta t) = \frac{1}{2}mu^2$$

となる。

デカルト派とライプニッツ派の主張の相違は，時間を等しくするか，移動距離を等しくするかの相違であって，本来，**運動している物体に何らかの「力」を当てはめようとすることが誤りである**とオイラーは指摘したのである*14。

---

*14 現代の運動方程式

$$F = m\frac{du}{dt}$$

を時間で積分すれば運動量式

$$\int F dt = \int m\frac{du}{dt}dt = [mu]_1^2$$

が得られ，移動距離 $ds = udt$ で積分すればエネルギー式

$$\int F ds = \int_1^2 m\frac{du}{dt}udt = \left[\frac{1}{2}mu^2\right]_1^2$$

が得られる。**運動方程式が力学の基本原理**であることを，オイラーは指摘している。

■仕事、エネルギー保存則の導入 .

オイラーは，仕事と運動エネルギー変化の関係を導いた。これは後のラグランジュの解析力学の出発点となった。

オイラーは「序説」の中で次のように説明している [1]

- 運動方程式
$$m\ du = F_x\ dt, \quad m\ dv = F_y\ dt, \quad m\ dw = F_z\ dt$$
にそれぞれ u, v, w をかけて
$$mudu = F_x udt = F_x dx, \quad mvdv = F_y vdt = F_y dy, \quad mwdw = F_z wdt = F_z dz$$
として積分したもの
$$\frac{1}{2}mu^2 = \int F_x\ dx$$
$$\frac{1}{2}mv^2 = \int F_y\ dy$$
$$\frac{1}{2}mw^2 = \int F_z\ dz$$
の右辺は「力の効果」(つまり**仕事**) を表すと考えることができる。
- 「すべての力の効果の和
$$\int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz$$
は，**他の座標系をとっても不変**であるがゆえに，この概念は極めて重要である。そしてこの三つの力は単一の力を分解することによって生じたのだから，その効果の和はそのもとになった単一の力の効果に等しい。」
- 「ある物体の運動が力によってどのように変えられたとしても，いわゆる活力[*15] (運動エネルギー)
$$\frac{1}{2}m(u^2 + v^2 + w^2) = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz + \text{const.}$$
は物体に作用する力の効果に常に比例している。」

つまり，**エネルギー積分** (力学におけるエネルギー保存則) を一般的な形で定義したことになる。

オイラーは後に,
$$\frac{dF_x}{dy} = \frac{dF_y}{dx}, \qquad \frac{dF_y}{dz} = \frac{dF_z}{dy}, \qquad \frac{dF_z}{dx} = \frac{dF_x}{dz}$$
を満たす (つまり (F_x, F_y, F_z) が**保存力**) の場合，$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -d\phi(x, y, z)$ と表すことができ、
$$\frac{1}{2}m(u^2 + v^2 + w^2) + \phi(x, y, z) = \text{const.}$$
となることを示している。

*15 当初は運動エネルギーを「活力」とよんでいた。

■相対運動と見かけの力　.

オイラーは，今日の慣性系，加速度系の相違を認識しており，加速度系がもたらす見かけの力 (慣性力) を正しく評価していた。

オイラーは「序説」の中で次のように説明している [1]

- 「我々はある物体の真の運動を決して見ることはできず，我々の知覚はつねにもっぱら物体の見かけの運動を告知するだけだから，我々は見かけの運動を真のものとみなし，その運動を維持するには力を要するか否かを追求する。そして我々は，他の状況から物体に力が働いているか否か，さらにそれが観測で見出されたものとどの程度一致しているかが証示されたとき，そこから見かけの運動が真の運動とどの程度異なるのかを結論付けることができる。」
- 「一直線上を (等速で) 運動する観測者にとってのみ，物体の運動の維持のために必要とされる力の判断において，たとえ物体の見かけの運動からその力を導きだしたとしても誤ることはない。」
- 「観測者の運動が等速直線運動でないとき，すべての見かけの運動を実現させるためには，実際に作用している力のほかに，観測者の位置に生じる変化がもたらす今ひとつの力が逆向きの方向に要求される。」
- 「この根拠から, あらゆる天体に対し, それに現実に働いている力以外に, それによって地球が駆動されている力に対してその天体の質量の地球の質量に対する比例関係にありしかも逆向きに働く力を作用させることによって, すべての天体のみかけの運動が決定されるのである。」

つまり，オイラーは**等速直線運動を行う慣性系**と**そうでない非慣性系**の相違を正確に認識しており，慣性系ではオイラーのいう運動方程式がそのまま成立する一方，非慣性系では**見かけの力 (慣性力，遠心力)** を運動方程式に付加することにより，同じように扱えることを述べている。

3　解析力学の成立

3.1　最小作用の原理

■モーペルチュイの生涯　.

ピエール＝ルイ・モロー・ド・モーペルテュイ (Pierre-Louis Moreau de Maupertuis, 1698-1759) はフランスの数学者，著述家である。「**最小作用の原理**」を最初に唱えたとされるほか，地球の形状を調査する**ラップランド観測隊**を指揮した。生物の進化論の分野でダーウィン以前に**進化について**述べた一人である。

フランスのサン・マロの豊かな商人の家に生まれた。家庭教師によって教育を受けた後，軍に入り騎兵隊に加わった。軍務の傍ら数学を学び数学者として評判になり，1723 年に科学アカデミーの会員になった。1728 年にはロンドンに渡り、王立協会の会員になり，ニュートンの重力理論をフランスに普及するのに貢献した。

当時、地球の形は回転楕円体に近いということは分かっていたが，ニュートンの理論から導かれる南北に扁平な楕円体形状 (扁球) であるのか，それまでのジャック・カッシーニの理論から導かれる南北に長い形状 (長球) であるのかが論争されていた。

Fig. 21 Pierre-Louis Moreau de Maupertuis

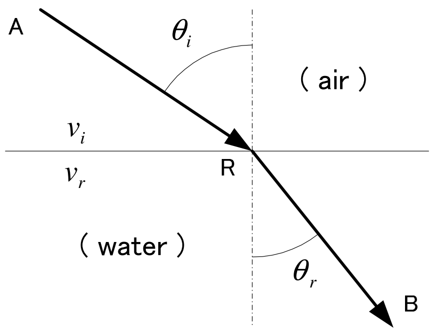
その問題に決着をつけるために，1736 年に赤道近くのペルーと極に近いラップランドに子午線弧長の測量のための観測隊が派遣され，モーペルテュイはラップランド隊の隊長を務めた。帰国後の 1738 年に『地球の形状』を発表した。この業績などにより評価され，1740 年にプロイセン王フリードリヒ 2 世にベルリンに招かれた。オーストリア継承戦争ではプロイセン軍に加わり 1741 年のモルヴィッツの戦いでオーストリア軍の捕虜となったが釈放された。

1742 年にはパリに戻り科学アカデミーの会長になり，翌年アカデミー・フランセーズの会員に選ばれた。1744 年に再びベルリンに招かれ，1746 年プロシア科学アカデミーの会長になった。七年戦争でフランスとプロシアが戦争になったことはモーペルテュイの立場を都合の悪いものにしたが，1757 年に引退するまでその職にあった。1758 年にバーゼルに移り，翌年没した [15][16]。

■光の屈折現象をめぐる論争 .

17 世紀のヨーロッパでは，光の屈折現象についての「スネルの法則」を説明するのに，**二つの説**が論争を繰り広げていた。

光の屈折について，「**スネルの法則**」が成り立つことが、17 世紀はじめには知られていた。



入射角：θ_i,　屈折角：θ_r

任意の入射角に対して

$$\sin\theta_i/\sin\theta_r = \text{const.}$$

が成立 (スネルの法則)。

Fig. 22 スネルの法則

デカルト は 1637 年の「屈折光学」のなかで，光の屈折を布に斜めに当たる小球に例えて，入射側媒体内速度を v_i，屈折側媒体内速度 v_r とするとき，境界面に垂直な速度成分だけが変わり，**平行な速度成分は変わらない**として，$v_i\sin\theta_i = v_r\sin\theta_r$，つまり

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r} = \frac{v_r}{v_i} = \text{const.} \tag{61}$$

となり、スネルの法則が得られることを示した。

フェルマーは 1662 年に「自然はより容易な仕方で，より妨げの少ない経路に沿って動く」というはなはだ目的論的な理由から，**光は所要時間が最短となる経路を進む** という光の伝播についての「**フェルマーの原理**」を提唱した。これにより，光の直進性，反射の法則が導けるし，屈折の法則も，後述のように

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r} = \frac{v_i}{v_r} = \text{const.} \tag{62}$$

の関係が得られる。スネルの法則に一致するが，デカルトの結果とは右辺の分母分子が入れ替わっている。

ホイヘンス (フェルマー派) は 1690 年の「光についての論考」のなかで，光を波動として扱い，**多数の素元波の包絡面が新たな波面になる**といういわゆる「**ホイヘンスの原理**」を提唱して，フェルマーの結果を支持した。

ニュートン (デカルト派) は 1704 年に「光学」を出版し，**光の粒子説**に基づいて力学的に扱ってデカルトと同一の結果を得た。

デカルトによる式 (61) では，水中の光速 v_r は空気中の光速 v_i より大きいことになるが，水中の光の速度が測定されたのは 19 世紀半ばであり，17 世紀のヨーロッパでは二つの説が論争されていた。

■モーペルテュイによる最小作用の原理 .

(光の屈折現象) モーペルテュイは**光学と力学の共通の原理**として「最小作用の原理」を提唱した。

モーペルテュイには宗教的な信念があり，「**自然はその効果を生みだす際に，常にもっとも単純な仕方で行う**」と信じていた。かれは 1744 年に，『今日まで両立不能と考えられていた異なる自然法則の一致』と題する論文を発表し，光学の法則と力学の法則が一つの原理にまとめられるとして，**「最小作用の原理」**を提唱した。そのうちの，まず光学の部分を見る。

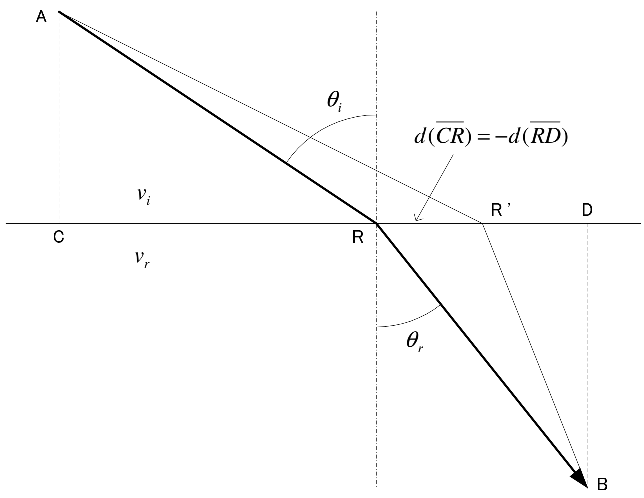


Fig. 23 最小作用原理による光の屈折

Fig.23 のように，光が媒体境界面 CD に対して斜めに ARB のように進むとし，各媒体内の光速を v_i, v_r とする。モーペルテュイの主張は，$\underline{(質量) \times (速さ) \times (距離)}$ が**最小となるような経路**をたどるというものであり，この量を**「作用」**と呼んだ。光の場合は質量は変わらないので，考えなくてよいとした。

光が ARB のように進むとき，作用 I は

$$I = v_i\overline{AR} + v_r\overline{RB} = v_i\sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CR}^2} + v_r\sqrt{\overline{DB}^2 + \overline{RD}^2}$$

である[*16]。すこしずれて，AR'B のように進むと I の増加量 dI は[*17]

$$\begin{aligned} dI &= v_i d(\overline{AR}) + v_r d(\overline{RB}) = v_i\frac{1}{2}\frac{2\overline{CR} \times d(\overline{CR})}{\overline{AR}} + v_r\frac{1}{2}\frac{2\overline{RD} \times d(\overline{RD})}{\overline{RB}} \\ &= (v_i \sin\theta_i - v_r \sin\theta_r)\, d(\overline{CR}) \end{aligned}$$

となる。これより，**作用 I が極値 (極小値) となる条件**は，$v_i \sin\theta_i - v_r \sin\theta_r = 0$ つまり，式 (61) が得られる。モーペルテュイはヨーロッパ大陸における**熱烈なニュートン支持者**の一人であり，デカルト説が正しいと確信していた。

---

*16 もし、ここでフェルマーと同じく「所要時間が最短となる」経路を考えていれば、$I = \overline{AR}/v_i + \overline{RB}/v_r$ となり、フェルマーと同じ式 (62) が得られる。

*17 $d(\sqrt{a^2+x^2}) = \frac{1}{2}\frac{2xdx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ および $d(\overline{CR}) + d(\overline{RD}) = 0$ を用いて

モーペルテュイは，２物体の**衝突問題**を「最小作用の原理」で説明しようとした。

Fig.24 のように，質量 m, M の２物体が衝突して，速度がそれぞれ $v \to u$，$V \to U$ に変化するとする。

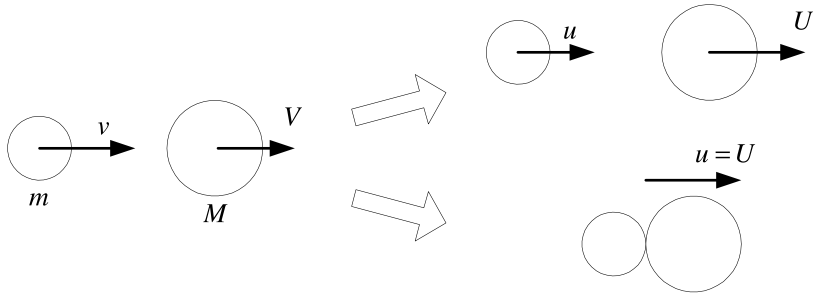


Fig. 24　２物体の衝突

反発係数 e を用いると，

$$U - u = e(v - V) \tag{63}$$

の関係がある。

この場合 (距離) は単位時間の移動距離つまり速度であるとして，モーペルテュイは作用を次式で表す[*18]。

$$I = \underline{(\text{質量}) \times (\text{速さ}) \times (\text{距離})} = m(u-v)^2 + M(U-V)^2$$

これが最小となるような衝突後の速度 u, U は、次式の条件で与えられる。

$$dI = 2m(u-v)du + 2M(U-V)dU = 0$$

式 (63) より $dU - du = 0$ をこの式に用いると $m(u-v) - M(U-V) = 0$ つまり

$$mu + MU = mv + MV \tag{64}$$

の関係が得られる (これは今日の運動量保存則である)。

再度，式 (63) を用いて，u, U を求めると，

$$u = \frac{mv + MV - eM(v-V)}{m+M}, \qquad U = \frac{mv + MV + em(v-V)}{m+M}$$

$e = 1$ のばあいは,

$$u = \frac{2MV - (M-m)v}{m+M}, \qquad U = \frac{2mv + (M-m)V}{m+M}$$

$e = 0$ のばあいは,

$$u = U = \frac{mv + MV}{m+M}$$

となり，正しい結果が得られる。つまり，<u>「最小作用の原理」は成り立っている</u>。

[*18] 速度そのものでなく，なぜ速度差であるのかは不明。

モーペルテュイは2質量の重心位置を「最小作用の原理」で説明しようとした。

Fig.25 のように，質量 m, M の2個の重りを長さ l の棒で結んだとき，全体の重心を求める問題を考える。

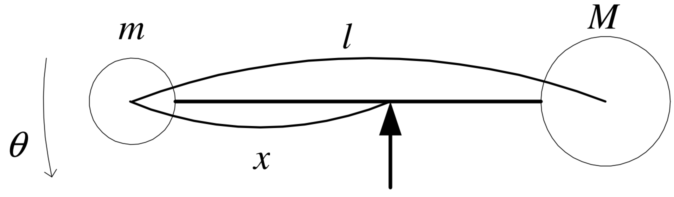


Fig. 25　2個の重りの重心

質量 m の重りから重心までの距離を x とする。重心位置を支点として，θ だけ回転したとすると，作用は

$$I = \underline{(\text{質量}) \times (\text{速さ}) \times (\text{距離})} = mx\dot{\theta}x\theta + M(l-x)\dot{\theta}(l-x)\theta = [mx^2 + M(l-x)^2]\theta\dot{\theta}$$

と表される。x の微小変化 dx に対する I の変化量は

$$dI = [2mxdx - 2M(l-x)dx]\theta\dot{\theta} = 2[mx - M(l-x)]\theta\dot{\theta}\ dx$$

となるので，I が極小となるのは $mx - M(l-x) = 0$，つまり

$$x = \frac{M}{m+M}l$$

となる[*19]。

「最小作用の原理」は，光学，動力学，静力学に共通した原理であるとモーペルテュイは主張している。しかし，彼の「最小作用の原理」では，(速度) や (距離) の選び方に統一性がなく，どう選べばよいか不明確である。??

[*19] ここで行ったことは，静力学における仮想仕事 (古くは仮想速度) の原理 [20] と同じである。

■オイラーによる最小作用の原理の検証　『最大・最小の性質を示す平面曲線を見出す方法』(1744)

オイラーは，**変分法の基礎となる関係式 (オイラー方程式)** を導いた。

x の関数 $y=f(x)$ が未知であり，x，y および $p\ (=dy/dx)$ の関数 $F(x,y,p)$ が与えられているとき，積分 $I=\int_a^b F(x,y,p)dx$ を最小または最大にするように，関数 $f(x)$ を決定せよ。

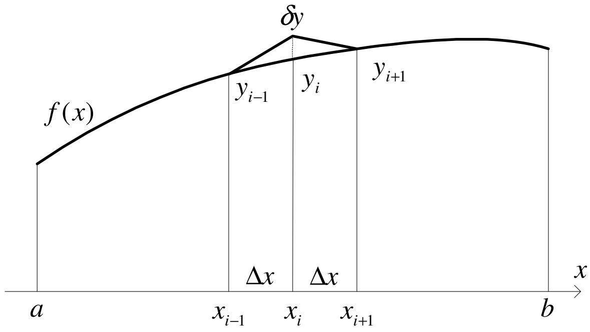


Fig. 26　オイラーの変分計算

Fig.26 において，積分 I を下記のように分割して表す。

$$I=\int_a^{x_{i-1}} Fdx+F\left(x_{i-1},y_{i-1},p_{i-1}\right)\Delta x+F\left(x_i,y_i,p_i\right)\Delta x+\int_{x_{i+1}}^b Fdx$$

ここで，関数 $f(x)$ の $x=x_i$ における値 $y_i=f(x_i)$ が δy だけ増加したとする。上式の第 1 項，第 4 項は変化せず，第 2 項，第 3 項だけが変化する。このとき，p_{i-1} と p_i の変化は

$$p_{i-1}\to\frac{(y_i+\delta y)-y_{i-1}}{\Delta x}=p_{i-1}+\frac{\delta y}{\Delta x}$$

$$p_i\to\frac{y_{i+1}-(y_i+\delta y)}{\Delta x}=p_i-\frac{\delta y}{\Delta x}$$

となるので，I の増加量 δI は次式となる。

$$\frac{\delta I}{\Delta x}=F\left(x_{i-1},y_{i-1},p_{i-1}+\frac{\delta y}{\Delta x}\right)-F(x_{i-1},y_{i-1},p_{i-1})+F\left(x_i,y_i+\delta y,p_i-\frac{\delta y}{\Delta x}\right)-F(x_i,y_i,p_i)$$

$$=\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_{i-1}\frac{\delta y}{\Delta x}+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_i\delta y-\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_i\frac{\delta y}{\Delta x}=\left[\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_i-\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_i-\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_{i-1}}{\Delta x}\right]\delta y$$

任意の δy に対して $\delta I=0$ となるためには

$$\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_i-\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_{i-1}}{\Delta x}-\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_i=0$$

$\Delta x\to 0$ の極限を考えて，次式 (**オイラー方程式**) を得る。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)-\frac{\partial F}{\partial y}=0 \tag{65}$$

(一定重力場での運動)
オイラーは「最小作用の原理」を，**物体は作用積分** $I = \int muds$ **が最小になる軌道を描く**と解釈した。
いくつかの具体例でこれを確かめているが，ここでは，一定重力場での物体の放物運動を取り上げる。

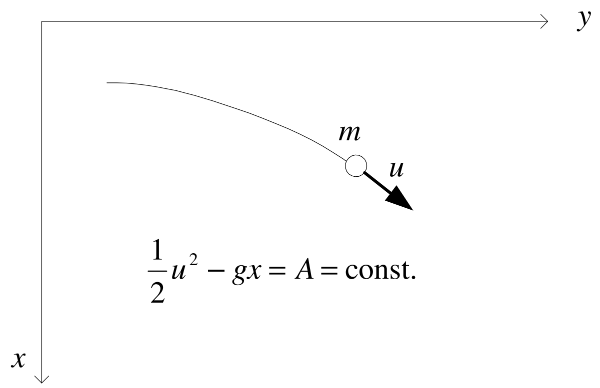


Fig. 27 一定重力場での運動

Fig.27 のように，鉛直下向きに x 軸，水平に y 軸をとると，速度 u と座標の間に

$$\frac{1}{2}u^2 - gx = A = \text{const.}$$

が成り立つので，速度は

$$u = \sqrt{2(A+gx)}$$

と表される。この場合の作用 I は，$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1+p^2}dx$ を用いて，次式で表される。

$$I = \int muds = \sqrt{2}m \int \sqrt{A+gx}\sqrt{1+p^2}dx$$

ただし，$p = dy/dx$ である。

ここで

$$F(x,y,p) = \sqrt{A+gx}\sqrt{1+p^2} \tag{66}$$

とおくと[*20]，I を最小にするには，$\int F(x,y,p)dx$ を最小にすればよいので，前節の**オイラー方程式 (65)** を満たす関数 $y(x)$ が求める軌道である。

式 (66) より，

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial p} = \frac{p\sqrt{A+gx}}{\sqrt{1+p^2}}$$

オイラー方程式 (65) に用いて，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{p\sqrt{A+gx}}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$$

[*20] 式 (66) の $F(x,y,p)$ は、独立変数 x の他に 関数 $y(x)$、$p(x)$ を含んでいる。このように、関数の関数として表される関数は、現代では**汎関数**とよばれる。

つまり，

$$\frac{p\sqrt{A+gx}}{\sqrt{1+p^2}} = C_1 = \mathrm{const.}$$

が得られる。これより，

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{A - C_1^2 + gx}}$$

これを積分して，水平方向座標 y は次式となる。

$$y = \int \frac{C_1}{\sqrt{A - C_1^2 + gx}} dx = \frac{2C_1}{g}\sqrt{A - C_1^2 + gx} + C_2$$

$y=0$ で高さ $x=0$ の位置から水平に打ち出したとすると，$x=0$ で $y=0,\ p=dy/dx=\infty$ より，$C_1 = \pm\sqrt{A},\ C_2 = 0$ となり，

$$y = 2\sqrt{\frac{Ax}{g}}$$

が得られる。

これは，鉛直座標 x が水平座標 y の 2 乗に比例する放物線軌道 $x = \frac{g}{4A}y^2$ となっており，**最小作用の原理から正しい運動が得られた**。

オイラーによると，**力学の問題を解く方法**には，

(1) 力のつりあいや運動方程式をもとにした直接的な方法
(2) 最大・最小をとるべき量を見出して変分法を用いる方法

の**二とおりの方法**がある。
しかし，後者の方法では作用の量を表す公式を見出すのが困難な場合が多く，その正否は，現状では (オイラーの当時は) 得られた結果を前者の方法の結果と比較することで判定せざるを得ない。
これが「最小作用の原理」についてのオイラーの結論であった [1]。

モーペルテュイの主張した「最小作用の原理」は，「自然はその効果を生み出す際に，常にもっとも単純な仕方で行う」という形而上学的な観念を根拠にしていた。

オイラーは（力がすべて保存力である）多くの場合に，この原理が正しい結果を与えることを，具体例で確認して，**何らかの普遍的な原理**があることを感じていたが，オイラー自身は，運動方程式をもとにした方法をより重要なものと考えていた。

「最小作用の原理」の背後にある普遍的な原理は，その後**ラグランジュ**により見出されることになる。

3.2　ラグランジュと変分法

■ラグランジュの生涯　ジョゼフ=ルイ・ラグランジュ (Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813) は，オイラーと並んで 18 世紀最大の数学者といわれ，今日の**解析力学の基礎**を作った [17][18]。

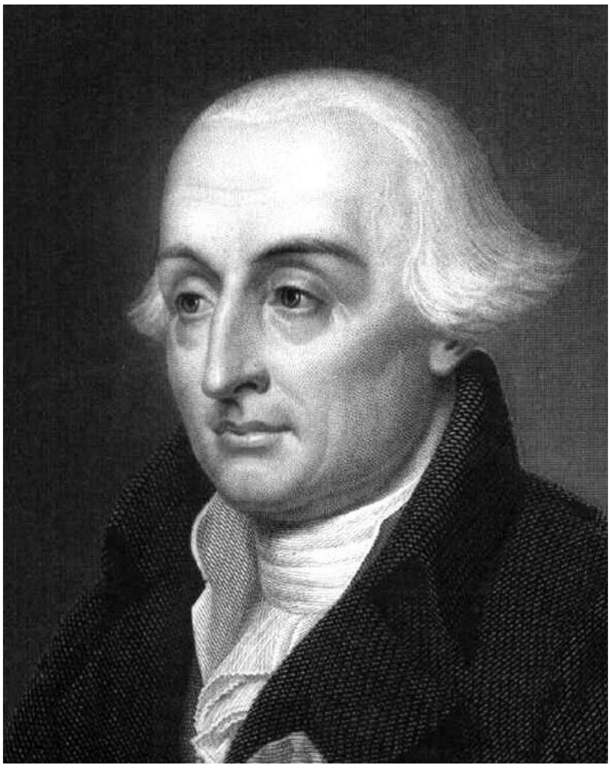


Fig. 28 Joseph Louis Lagrange

イタリアのトリノで生まれた**フランス系イタリア人**。法律の勉強をするためトリノ大学に入るが，ここで自然学と数学の講義に惹かれ，そちらの道を志すことになる。17 歳のとき，当時目覚しい発展を見せていた解析学 (微積分学) の勉強を始め，わずか 2 年後，**変分法**と呼ばれる数学の基本的なアイディアを発見した。これをベルリンの数学者**オイラー**に知らせた。オイラーは直ちにラグランジュの才能を認め，これを機に二人は文通をするようになった。またこれが契機で，ラグランジュはトリノの王立砲兵学校に職を得，数学を教えることになった。この間，トリノ私立科学協会設立にも貢献し，後，トリノ王立科学アカデミーへと発展した。

その後，ダランベールの推薦を得て，オイラーの後任としてベルリンのアカデミーへ移り (30 歳)，数学部門長を務めながら，精力的に研究活動を行った。

1786 年に後ろ盾であったプロイセン王フリードリヒ 2 世が亡くなると，ラグランジュはフランス科学アカデミーからの申し出を受け，パリへと移り住んだ (51 歳)。翌年，フランス革命が勃発し，1793 年には科学アカデミーが閉鎖され，国内の敵国人を逮捕する命令が出されるが，ラグランジュは辛くも例外として扱われた。革命政府のもと，ラグランジュはラプラス，ラヴォアジェ，ボルダ，クーロンらと共に度量衡委員会や経度委員会といった重要な部局のメンバーとして働いた。また，革命政府によって設立された高等教育機関で教鞭を取り，**エコール・ポリテクニークの初代校長**も勤めた。

彼は若い頃から力学の理論的問題に大きな関心を持ち，月や惑星の運動，音 (振動)，流体力学などに理論的貢献をした。特に，力学を一般化して，**最小作用の原理に基づく解析力学**を確立し，主著『解析力学』にまとめた。1813 年パリで亡くなり，遺体はパンテオン霊廟へと運ばれ埋葬された。善良で誠実な人柄から多くの人の尊敬を受けたもようであり，ゲーテは彼を絶賛し，皮肉家のスタンダールはベーコン，ラプラス，キュビエをこきおろした上で，ラグランジュを例外としている。今なおフランスを代表する偉人の一人として慕われている。

ラヴォアジエの処刑について「彼の頭を切り落とすのは一瞬だが，彼と同じ頭脳を持つものが現れるには 100 年かかるだろう」と語ったと言う。また**マリー・アントワネット**の数学教師でもあり，「なぜ私が残されたのかわからない」と彼女やラヴォアジェの処刑を嘆き，一生苦しんだとされる。

ラプラスとラグランジュ　(物理学者の**小出昭一郎氏**のラプラス vs. ラグランジュ評 [19])

フランス革命の頃にパリで活躍した数理物理学者のなかでよく対比されるのがラプラス (Pierre Simon de Laplace, 1749-1827) とラグランジュ (Joseph Louis Lagrange, 1736-1813) である。ラブラスは数学の天才として賞賛されたけれども，名誉欲と政治的無節操のために非難される。彼は出生地の血縁や恩人から遠ざかり，つねに自分の賤しい生まれを隠そうとした。ナポレオンに重く用いられ，その全盛時代には『天体力学』の序文で皇帝を賛美し，『確率の解析的理論』を献呈しておきながら，その失脚後はルイ 18 世にとり入ってナポレオン追放令に署名し，『天体力学』の序文は撤回し、『確率の解析的理論』の献辞はルイ 18 世への献辞にとりかえたのであった。

フランス人を祖父に持ちイタリアで生まれたラグランジュは，その才能を早くから認められ，サルジニア王やプロシャ王に用いられて後，1787 年ルイ 16 世に招かれてパリに移り，王の一族やアカデミーから最大の尊敬を受けつつルーブル宮内で研究していたところ，1789 年の大革命が勃発した。ラグランジュは王族の保護を受けてはいたがフラシス人民の苦しみをもよく理解し，革命の成功を期待していたと言われるが，恐怖政治には同調せず，人目を避けて閉じこもり研究に没頭した。しかしやがて，エコール・ポリテクニックの数学教授や度量衡改正委員長に任命されるようになり，その才能と人柄のゆえに革命後のフランス人にも尊敬された。ナポレオンも，謙虚で独断的でないこの老学者に最大の敬意を表していたという。

■**変分法** .

オイラーが手をつけた変分法を，ラグランジュが体系化し，力学の代数化と解析化に全面的に応用した。

ライプニッツが微分・積分を記号化したように，ラグランジュは**変分操作を記号化**して演算子として扱い，代数的で操作的な方法を提唱した。

Fig.29 に示すように，まず関数 $y = y(x)$ について

微分　x の微小変化 dx に対する y の微小変化 dy 、と
変分　関数 $y = y(x)$ 自身の任意の変化 $\delta y = \delta y(x)$

とを明確に区別して表記し，それらの**演算操作の規則**を明確化した。たとえば、

(1) 変分演算は独立変数には作用しない。 $\delta x = 0$
(2) 変分演算と積分演算は互換である。 $\delta \int = \int \delta$
(3) 変分演算と微分演算は互換である。 $\delta\ d = d\ \delta$

この方法を用いると，関数 $F(x, y, p)$ の極値問題に関する**オイラーの方程式** (65) を，下記のように導くことができる。

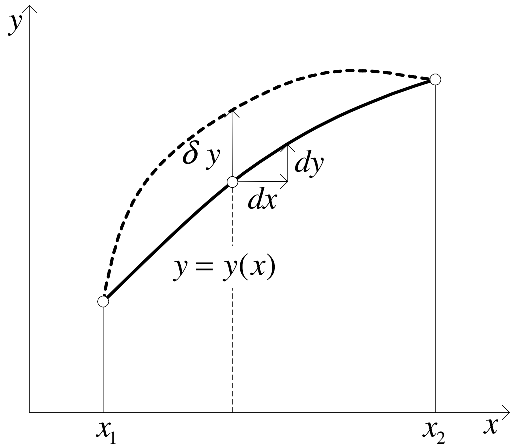


Fig. 29 微分と変分

関数 $F(x, y, p)$ の**微分**を

$$dF(x,y,p) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial p}dp = Mdx + Ndy + Pdp$$

と表すとき，$I = \int Fdx$ の**変分** は

$$\begin{aligned}\delta I = \delta \int Fdx &= \int (M\delta x + N\delta y + P\delta p)dx = \int \left\{ N\ \delta y + P\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\} dx \\ &= \int \left\{ N\ \delta y + P\frac{d\ \delta y}{dx}\right\} dx = [P\delta y] + \int \left\{ N - \frac{dP}{dx}\right\} \delta y\ dx\end{aligned}$$

となる。最後の等式では，2 項目を部分積分している。

積分の端点 x_1, x_2 で $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$ であるとき第 1 項の定積分値 $[P\delta y]_{x_1}^{x_2}$ は 0 であり，その間の任意の $\delta y(x)$ に対して $\delta I = 0$ となるためには，

$$\frac{dP}{dx} - N = 0$$

でなければならない。つまり，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

となり，代数的手法によりオイラーの方程式 (65) が得られた。

■静力学における変分原理 (仮想仕事の原理)　.

> ラグランジュはすべての力学を統一的に捉えようとした。
> 統一原理は，静力学においては「仮想速度の原理」(**仮想仕事の原理**) となる。

対象とする物体の点 A, B, C, $\cdots$ に大きさ $P,\ Q,\ R,\ \cdots$ の力が働いているとする。力 $P,Q,R,\cdots$ の最大公約数を W とすると，整数 $k,l,m,\cdots$ を用いて，$P=kW,\ Q=lW,\ R=mW,\cdots$ とすることができる。しかがって，力 $P,Q,R,\cdots$ を Fig.30 のような滑車系の張力で置き換えることができる。このとき系の**平衡の条件**は,「系の任意の微小変位によりひもの可動端の重りが下降しないこと」である。

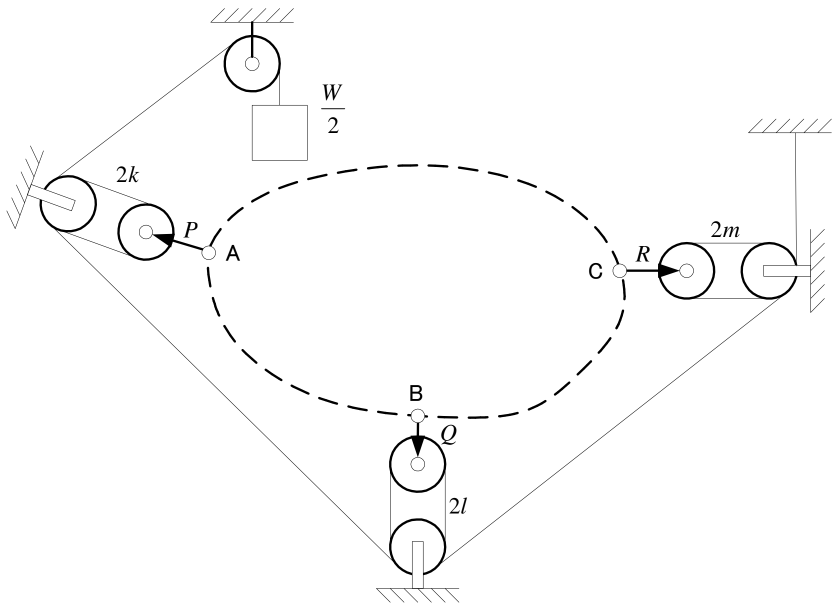


Fig. 30　剛体のつりあい

ここで，A,B,C,$\cdots$ の各点の変位 (力の方向への変位) を $\delta p,\ \delta q,\ \delta r,\ \cdots$ とすると，重りの下降量は

$$2k\delta p+2l\delta q+2m\delta r+\cdots=\frac{P\delta p+Q\delta q+R\delta r+\cdots}{W/2}$$

となるので，重りが下降しない条件は

$$P\delta p+Q\delta q+R\delta r+\cdots\leq 0$$

変位 $\delta p,\ \delta q,\ \delta r,\ \cdots$ の符号を逆にしても同様に成り立つことが必要であるので，結局，つりあいの条件は次式となる。

$$P\delta p+Q\delta q+R\delta r+\cdots=0 \tag{67}$$

これが「**仮想速度の原理**」の**解析的表現**である[*21]。

[*21] 現在は「仮想速度の原理」は**仮想仕事の原理**とよばれている。

(仮想仕事の原理の簡単な例)：**斜面上の物体のつりあい**

Fig.31 のように，角度 θ の斜面上を動く質量 m_1 の物体と，鉛直方向に上下する質量 m_2 の物体のつりあいを考える。

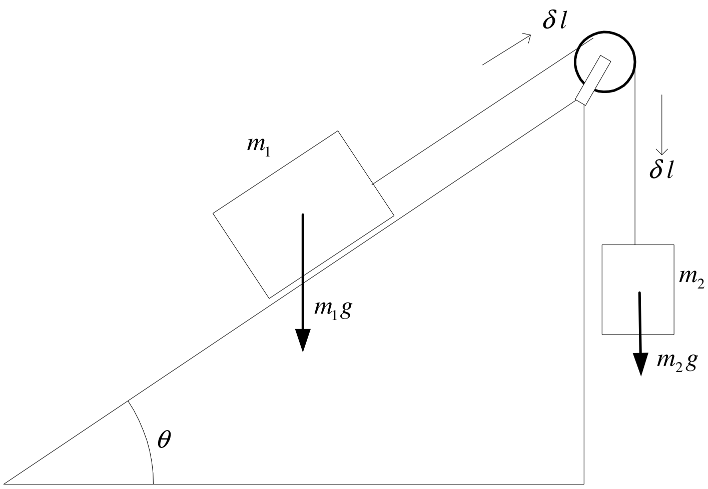


Fig. 31 斜面上のつりあい

仮に m_1 が斜面に沿って δl だけ上昇し，m_2 が δl だけ下降したとする。

重力 $m_1 g$ がなす仕事は, 力の作用する物体 (力の作用点) は逆方向に $\delta l \sin\theta$ だけ移動するので, $-m_1 g \delta l \sin\theta$ である。重力 $m_2 g$ がなす仕事は，$m_2 g \delta l$ である。したがって，仮想仕事の原理は

$$m_2 g \delta l - m_1 g \delta l \sin\theta = 0$$

となり，これより

$$m_2 = m_1 \sin\theta$$

が得られる。

これは簡単な例[*22]であるが，つねに仮想仕事の原理による方法が簡単であるかどうかはわからない。ラグランジュの目的は，**力学を純粋に解析的な操作に還元する**ことにあり，静力学においては，仮想仕事の原理がその目的に合致していると主張しているのである。

[*22] 他の例は，別紙 [20] を見られたし。

■**ラグランジュの未定乗数法** .

ラグランジュは**拘束系の力学を扱う便利な手段**として，未定乗数法を考案した。

Fig.32 のように，曲線 $y = y(x)$ に拘束されている質量 m の質点に外力 $F = (F_x, F_y)$ を加えるときのつりあいを考える。

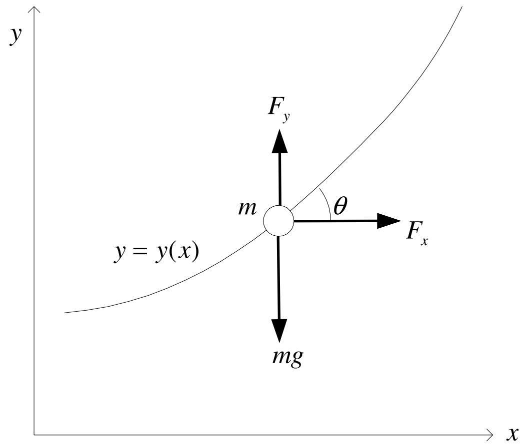


Fig. 32 曲線に拘束された物体のつりあい

仮想仕事の原理より，ただちに次式が得られる。

$$F_x \delta x + (F_y - mg)\delta y = 0 \tag{68}$$

しかし，曲線に沿って動く必要があるので，δx と δy は次の条件 (拘束条件) を満たす必要がある。

$$\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x = \delta y - \tan\theta\ \delta x = 0 \tag{69}$$

これを処理するのに，次の**二つの方法**が考えられる。

A 案：消去法　式 (68) と (69) より δy を消去して，

$$[F_x + (F_y - mg)\tan\theta]\delta x = 0$$

となり，これが任意の δx について成立するには，

$$F_x + (F_y - mg)\tan\theta = 0 \tag{70}$$

を満たさなければならない[*23]。

[*23] 参考までに，式 (70) を書き換えると，

$$F_x \cos\theta + (F_y - mg)\sin\theta = F_t = 0$$

となり，これは接線方向のつりあい式となっている。

B 案：未定乗数法　未知の定数 λ を式 (69) に乗算して，それを式 (68) に加算すると

$$(F_x + \lambda \tan\theta)\delta x + (F_y - mg - \lambda)\delta y = 0$$

となる。これが任意の $\delta x, \delta y$ について成り立つ条件より，

$$F_x + \lambda \tan\theta = 0$$
$$F_y - mg - \lambda = 0$$

λ を消去して，同じ式 (70) が得られる。

多数の質点の場合や拘束条件の数が多くなった場合，A 案の方法では式が複雑となる。そのような場合でも，B 案は座標間の対称性を保つことができ，比較的簡単に見通しよく計算することができる。B 案は**ラグランジュの未定乗数法**とよばれている。

参考までに，一般の場合についてラグランジュの未定乗数法を以下に示す。

条件 $f_1(p,q,r,\cdots)=0$，$f_2(p,q,r,\cdots)=0$，$f_3(p,q,r,\cdots)=0$，$\cdots$ のもとで，関数 $F(p,q,r,\cdots)$ が極値をとるための条件を求める。

関数 $F(p,q,r,\cdots)$ が**極値を持つ条件**は

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial p}\delta p + \frac{\partial F}{\partial q}\delta q + \frac{\partial F}{\partial r}\delta r + \cdots = 0 \tag{71}$$

となり，**拘束条件**

$$f_1(p,q,r,\cdots)=0, \qquad f_2(p,q,r,\cdots)=0, \qquad \cdots \tag{72}$$

は

$$\delta f_1 = \frac{\partial f_1}{\partial p}\delta p + \frac{\partial f_1}{\partial q}\delta q + \frac{\partial f_1}{\partial r}\delta r + \cdots = 0 \tag{73}$$

$$\delta f_2 = \frac{\partial f_2}{\partial p}\delta p + \frac{\partial f_2}{\partial q}\delta q + \frac{\partial f_2}{\partial r}\delta r + \cdots = 0 \qquad \cdots \tag{74}$$

と表すことができる。**未定乗数** λ_1，λ_2，$\cdots$ を式 (73)，(74)，$\cdots$ にかけて，式 (71) に加えると，

$$\delta F = \left[\frac{\partial F}{\partial p} + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial p} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial p} + \cdots\right]\delta p + \left[\frac{\partial F}{\partial q} + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial q} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial q} + \cdots\right]\delta q + \cdots = 0$$

これより次式が得られる。

$$\frac{\partial F}{\partial p} + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial p} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial p} + \cdots = 0 \tag{75}$$

$$\frac{\partial F}{\partial q} + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial q} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial q} + \cdots = 0 \cdots \tag{76}$$

この関係式の数はすべての座標の数 N に等しく，この中に拘束条件の数 m と同数の未定乗数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ が含まれている。したがって，ここから $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ を消去すれば (または，拘束条件 (72) を満たす等，他の適当な条件から値を決めれば)，$(N-m)$ 個の求める関係式が得られる。

■動力学における変分原理 .

仮想仕事の原理を動力学に適用して，動力学の基本方程式を導く。

Fig.33 のように，複数の質点 $m_1, m_2, \cdots, m_i.\cdots$ から構成される系 (質点系) を考える。

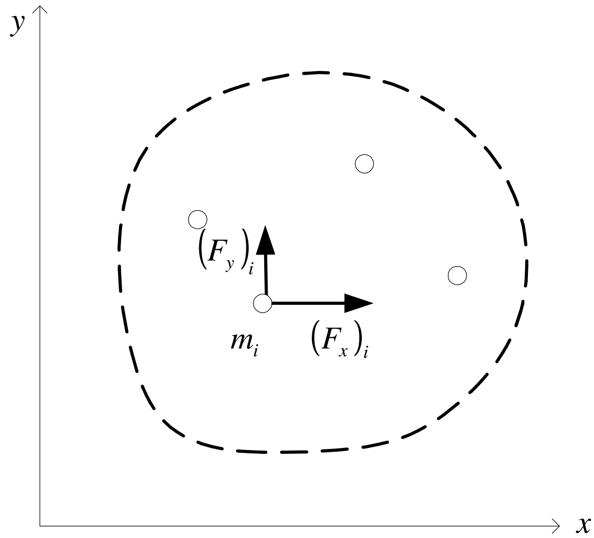


Fig. 33 最小作用の原理

今，系のなかの質量 m_i の一つの質点に働くすべての力を $(\mathbf{F})_i$ とすると、

$$m_i \ddot{\mathrm{r}}_i - \mathrm{F}_i = 0$$

となる。$(m\ddot{\mathrm{r}})_i$ も一種の力と考えれば，これは静力学と同じ力のつりあいを表していると見なすことができるので，**仮想仕事の原理が成り立つ**と考えられる。仮想変位 $(\delta \mathrm{r})_i$ を掛けて全質点について加え合わせると、

$$\sum_i (m_i \ddot{\mathrm{r}}_i - \mathrm{F}_i) \cdot \delta \mathrm{r}_i = 0$$

となる。$\mathrm{r}_i = (x, y, z)_i$、$\mathrm{F}_i = (F_x, F_y, F_z)_i$ として、成分表示すれば、

$$\sum_i m_i (\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + \ddot{z}\delta z)_i - \sum_i (F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z)_i = 0 \tag{77}$$

となる。ラグランジュは，これが**動力学の基本方程式**であるとしている。

力 $\mathrm{F}_i = (F_x, F_y, F_z)_i$ には，外部からこの系に加えた力 (**外力**) の他に，系に含まれる質点間で及ぼしあう力 (**内力**) も含まれるが，系が変形しない場合 (剛体の場合) には，これら内力の仮想仕事は打ち消し合う。したがって式 (77) の $(F_x, F_y, F_z)_i$ では外力のみを考えればよく，**拘束力等の内力は考えなくてよい**[*24]。

[*24] 質点に加わる力 $\boldsymbol{F}_i$ を拘束力 $\boldsymbol{R}_i$ とそれ以外の力 $\boldsymbol{F}_i^{(e)}$ に分けて，$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i^{(e)} + \boldsymbol{R}_i$ と表すとき，全仮想仕事

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_i \boldsymbol{F}_i^{(e)} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i + \sum_i \boldsymbol{R}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i$$

のうち，拘束力の仮想仕事 $\sum_i \boldsymbol{R}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i$ は互いに打ち消しあってゼロとなる。

仮想仕事の原理から力学のエネルギー保存則を導く。

動力学の基本方程式 (77) において，仮想変位 δx 等が現実の変位を表しているとして、dx 等に置き換えると

$$\sum_i m_i(\ddot{x}dx + \ddot{y}dy + \ddot{z}dz)_i - \sum_i (F_x dx + F_y dy + F_z dz)_i = 0$$

ここで，$\ddot{x}_i\ dx_i = (d\dot{x}_i/dt)\dot{x}_i\ dt = (1/2)\ d(\dot{x}_i^2)$ 等を用い，$\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2 = u_i^2$ と表して書き換えると，

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i\ d(u_i^2) - \sum_i (F_x dx + F_y dy + F_z dz)_i = 0$$

ここで，力 $(F_x, F_y, F_z)_i$ が**保存力**の場合，

$$(F_x)_i = -\frac{\partial \phi_i}{\partial x_i}, \qquad (F_y)_i = -\frac{\partial \phi_i}{\partial y_i}, \qquad (F_z)_i = -\frac{\partial \phi_i}{\partial z_i}$$

となる関数 (ポテンシャルエネルギー) $\phi_i = \phi_i(x_i, y_i, z_i)$ が存在して，

$$(F_x dx + F_y dy + F_z dz)_i = -d\phi_i$$

となるので，

$$\sum_i \left\{ \frac{1}{2} m\ d(u^2) + d\phi \right\}_i = 0$$

となる。これを積分して次式を得る。

$$\sum_i \left(\frac{1}{2} m u^2 + \phi \right)_i = H = \text{const.} \tag{78}$$

これは運動エネルギーとポテンシャルエネルギーをあわせた**エネルギー保存則**を表している。

力が保存力である場合，仮想仕事の原理から最小作用の原理を導く。

式 (78) のエネルギー保存則の変分をとると

$$\delta H = \frac{1}{2} \sum m \delta(u^2) + \sum \delta\phi = 0$$

これより，$\sum_i (F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z)_i = -\sum_i \delta\phi_i = \sum_i \left\{ \frac{1}{2} m \delta(u^2) \right\}$ となり，基本方程式 (77) は次式となる。

$$\sum_i m \left\{ \ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + \ddot{z}\delta z - \frac{1}{2}\delta(u^2) \right\}_i = 0 \tag{79}$$

となる。ここで，

$$\ddot{x}\delta x = \frac{d\dot{x}}{dt}\delta x = \frac{d(\dot{x}\delta x)}{dt} - \dot{x}\frac{d\delta x}{dt} = \frac{d(\dot{x}\delta x)}{dt} - \dot{x}\delta\dot{x} = \frac{d(\dot{x}\delta x)}{dt} - \frac{1}{2}\delta(\dot{x}^2)$$

等であり，さらに

$$\begin{aligned}
\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + \ddot{z}\delta z - \frac{1}{2}\delta(u^2) &= \frac{d}{dt}(\dot{x}\delta x + \dot{y}\delta y + \dot{z}\delta z) - \frac{1}{2}\delta(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}\delta(u^2) \\
&= \frac{d}{dt}(\dot{x}\delta x + \dot{y}\delta y + \dot{z}\delta z) - \delta(u^2) \\
&= \frac{d}{dt}(\dot{x}\delta x + \dot{y}\delta y + \dot{z}\delta z) - \delta\left(u\frac{ds}{dt}\right)
\end{aligned}$$

となることを用いると，式 (79) は次式となる。

$$\sum_i m_i \left[\frac{d}{dt}(\dot{x}\delta x + \dot{y}\delta y + \dot{z}\delta z) - \delta\left(u\frac{ds}{dt}\right)\right]_i = 0 \tag{80}$$

となり、これを運動の始点 A から終点 B まで (時間 t_A から t_B まで) 積分すると

$$\sum_i m_i \left[(\dot{x}\delta x + \dot{y}\delta y + \dot{z}\delta z)_i\right]_A^B = \sum_i m_i \int_A^B \delta\left(u\frac{ds}{dt}\right)_i dt$$

となる。

A,B で $\delta x = \delta y = \delta z = 0$ と選べば左辺の値は 0 となるので、

$$(\text{右辺}) = \delta\left\{\sum_i m_i \int_A^B \left(u\frac{ds}{dt}\right)_i dt\right\} = \delta\left\{\sum_i \int_A^B (mu)_i ds_i\right\} = 0$$

これは**最小作用の原理**そのものである。**力が保存力の場合**，最小作用の原理は成立することが示された。

■**ラグランジュの運動方程式** .

作用する力が保存力である場合を対象に，仮想仕事の原理からラグランジュの運動方程式を導く。

各質点に働く外力が保存力である場合，そのポテンシャルエネルギー $\phi_i(x_i, y_i, z_i)$ を用いて，基本方程式 (77) は

$$\sum_i [m(\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + \ddot{z}\delta z) + \delta\phi]_i = 0 \tag{81}$$

となる。ここで，

$$m\ddot{x}\delta x = m\frac{d\dot{x}}{dt}\delta x = m\frac{d}{dt}(\dot{x}\delta x) - m\dot{x}\frac{d\delta x}{dt} = m\frac{d(\dot{x}\delta x)}{dt} - m\dot{x}\delta\dot{x} = m\frac{d(\dot{x}\delta x)}{dt} - \frac{1}{2}m\delta(\dot{x}^2)$$

等であり，さらに，当該質点の運動エネルギー $\tau = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ を用いると，式 (79) は

$$\sum_i \left[m\frac{d(\dot{x}\delta x) + d(\dot{y}\delta y) + d(\dot{z}\delta z)}{dt} - \delta\tau + \delta\phi\right]_i = 0 \tag{82}$$

となる。

これを運動の始点 A から終点 B まで (時間 t_A から t_B まで) 積分して，A および B で $\delta x_i = \delta y_i = \delta z_i = 0$ と選べば，第 1 項の積分は 0 となり，第 2 項がゼロであることより次式が得られる。

$$\int_A^B \sum (\delta\tau - \delta\phi)\ dt = \delta\int_A^B (T - U)\ dt = \delta\int_A^B L\ dt = 0 \tag{83}$$

ここで，$T = \sum\tau$ は**系全体の運動エネルギー** であり、$U = \sum\phi$ は**系全体のポテンシャルエネルギー** であり、その差 $L = T - U$ は**ラグランジュ関数** とよばれる。

つまり、保存力のもとでは、ラグランジュ関数 $L = T - U$ の時間積分を極小 (または極大) とするように運動することがわかる*25。

ラグランジュ関数は各質点の座標，速度および時間の関数であるが，質点の座標間には種々の拘束があり，すべてを任意に選ぶことはできない。任意に選ぶことのできる座標 (角度等を含めた**一般化座標**) を q_1，q_2，$q_3, \cdots$ とすると，

$$L = L(\dot{q}_i,\ q_i,\ t) = T(\dot{q}_i,\ q_i,\ t) - U(q_i,\ t)$$

と表すことができる。上の L が極値を持つための条件はオイラー方程式 (65) で与えられるので、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{84}$$

または

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \tag{85}$$

となる。式 (84) または (85) は**ラグランジュの運動方程式**と呼ばれている*26。ここに、**動力学の代数化、解析化**が確立した。

*25 結局、動力学における「最小作用の原理」は、ラグランジュ関数の時間積分が極値を持つことに帰着する。このことは、「**ハミルトン (Hamilton) の原理**」とよばれることもある。

*26 保存力でない力を含む場合を含めた応用例等は別紙資料等 [20][19] を参照されたい。

4 まとめ

ニュートン以降の，おもにヨーロッパ大陸における力学の進展をたどった。

ライプニッツが微積分を用いて下準備をし，その影響を受けた**ヴァリニョン**，**ヘルマン**，**ベルヌーイ一族**やオイラーにより力学の解析化，原理の確立へと進み，**ラグランジュ**によって一応の完成を見たと概観できるようである。この後，ニュートン力学はハミルトン=ヤコビの正準方程式を経て**量子力学**へと繋がるが，これ以降は準備不足のため，今回は省略する。

高専で力学を学ぶ者は，オイラー，ラグランジュあたりに，今ひとつの興味を持つ必要があると感じる。本稿の多くの部分は山本義隆氏の著書 [1] に拠っている。少し難解ではあるが，一読に値するので是非読まれるよう推奨する。

参考文献

[1] 山本義隆, "**古典力学の形成 (ニュートンからラグランジュへ)**", 日本評論社 (1997).

[2] ニュートン (河辺六男他訳), "**自然哲学の数学的諸原理 (第 3 版)**"(世界の名著 ” ニュートン ” 収録), 中央公論社 (1979).

[3] Web Page, "http://ja.wikipedia.org/wiki/**ゴットフリート・ライプニッツ**", (2014.04.03).

[4] Web Page, "http://www.ariga-kagakushi.info/portrait/Leibniz.html", (2014.04.03).

[5] Web Page, "**ライプニッツとニュートン：微積分学発見の優先権論争**"、http://philosophy.hix05.com/Leibniz/leibniz02.html, (2014.05.01).

[6] Web Page, "http://ja.wikipedia.org/wiki/**ピエール・ヴァリニョン**", (2014.04.03).

[7] Web Page, "http://en.wikipedia.org/wiki/Jakob_Hermann", (2014.04.04).

[8] Web Page, "http://ja.wikipedia.org/wiki/**ヨハン・ベルヌーイ**", (2014.04.03).

[9] Web Page, "http://ja.wikipedia.org/wiki/**ダニエル・ベルヌーイ**", (2014.04.03).

[10] Web Page, "http://www.ariga-kagakushi.info/portrait/BernoulliDaniel.htm", (2014.04.03).

[11] Web Page, "http://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_family", (2014.08.25).

[12] Web Page, "http://ja.wikipedia.org/wiki/**レオンハルト・オイラー**", (2014.04.09).

[13] Web Page, "http://www.ariga-kagakushi.info/portrait/Euler.html", (2014.04.09).

[14] Web Page, "http://ja.wikipedia.org/wiki/**ヤコブ・ベルヌーイ**", (2014.04.03).

[15] Web Page, "http://ja.wikipedia.org/wiki/**ピエール=ルイ・モロー・ド・モーペルテュイ**", (2014.04.21).

[16] Web Page, "http://www.ariga-kagakushi.info/portrait/Maupertuis.html", (2014.04.21).

[17] Web Page, "http://ja.wikipedia.org/wiki/**ジョゼフ=ルイ・ラグランジュ**", (2014.04.26).

[18] Web Page, "http://www.ariga-kagakushi.info/portrait/Lagrange.html", (2014.04.26).

[19] 小出昭一郎, "**解析力学 [物理入門コース** 2]", 岩波書店 (1983).

[20] S.Yamauchi, "Lagrange **の運動方程式 (機械力学講義資料)**", 講義資料 (2013).