3 補足

S.Yamauchi

2017 年 6 月 18 日

本稿では,「3 ニュートン以降の力学の確立」の補足として,力学のいくつかの問題に対する現代的解答を示す。

目次

1　ケプラーの法則と万有引力の法則の関係

惑星の軌道を，太陽を原点とする平面極座標で表す。

■ケプラーの法則　ケプラーの 3 法則は下記のように表される。

第 1 法則：(楕円軌道の法則)　惑星は，太陽をひとつの焦点とする楕円軌道上を動く。

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\theta}{a(1-e^2)} \tag{1}$$

第 2 法則：(面積速度一定の法則)　惑星と太陽とを結ぶ線分が単位時間に描く面積は，一定である。

$$\frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = h = \text{const.} \tag{2}$$

第 3 法則：(調和の法則)　惑星の公転周期の 2 乗は，軌道の長半径の 3 乗に比例する。

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const.} \tag{3}$$

■万有引力 (重力) の法則　ニュートンにより見出された万有引力 (重力) の法則は次のとおりである。

$$F_r = -G\frac{Mm}{r^2}, \qquad F_\theta = 0 \tag{4}$$

■平面極座標での運動方程式　$x-y$ 座標系での運動方程式は次式である。

$$m\frac{dv_x}{dt} = F_x, \qquad m\frac{dv_y}{dt} = F_y \tag{5}$$

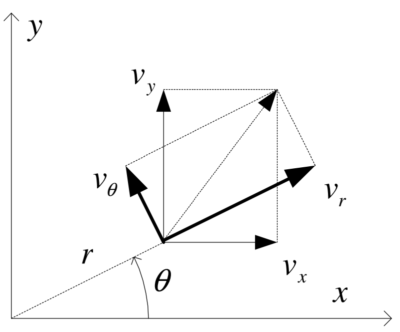

Fig. 1　平面極座標

これを平面極座標 ($r-\theta$ 座標) に変換する。Fig. 1 のように r 方向，θ 方向の速度を v_r，v_θ (それぞれ，r，θ が増加する方向を正) とすると，次式が得られる。

$$v_r = \dot{r} = v_x\cos\theta + v_y\sin\theta, \qquad v_\theta = r\dot{\theta} = -v_x\sin\theta + v_y\cos\theta$$

第 1 式を時間で微分して，r 方向の加速度は次式となる。

$$\ddot{r} = \dot{v}_r = \dot{v}_x\cos\theta + \dot{v}_y\sin\theta + (-v_x\sin\theta + v_y\cos\theta)\dot{\theta} = \dot{v}_x\cos\theta + \dot{v}_y\sin\theta + r\dot{\theta}^2$$

速度の微係数を (5) の力成分で表し，$F_r = F_x \cos\theta + F_y \sin\theta$ と置いて，次の運動方程式が得られる。

$$m\ddot{r} = F_r + mr\dot{\theta}^2, \qquad \text{or} \qquad m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r \tag{6}$$

一方，θ 方向の加速度は次式となる。

$$\dot{v}_\theta = \frac{d}{dt}(r\dot{\theta}) = -\dot{v}_x \sin\theta - \dot{v}_y \cos\theta + (-v_x \cos\theta - v_y \sin\theta)\dot{\theta} = \frac{1}{m}(-F_x \sin\theta + F_y \cos\theta) - v_r\dot{\theta}$$

式 (5) を用い，$F_\theta = -F_x \sin\theta + F_y \cos\theta$ と置いて，次の運動方程式が得られる。

$$m\frac{d}{dt}(r\dot{\theta}) = F_\theta - m\dot{r}\dot{\theta}, \qquad \text{or} \qquad m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = rF_\theta \tag{7}$$

つまり、

$\dfrac{d}{dt}$(角運動量) = (力のモーメント)
(角運動量) = (運動量のモーメント) = (運動量) × (腕の長さ) = (間性モーメント) × (角速度)

式 (6)，(7) が <u>平面極座標での運動方程式</u> である。

1.1　ケプラーの法則から万有引力の法則を導く (順ニュートン問題)

ケプラーの 3 法則をもとに，重力の法則を導く [1]。

まず，ケプラーの第 2 法則 (面積速度一定) より $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = h = \text{const.}$ ゆえ，式 (7) より

$$F_\theta = 0$$

となり，式 (4) の第 2 式が得られた。

次に楕円の式 (1) を微分して，

$$-\frac{\dot{r}}{r^2} = -\frac{e\sin\theta}{a(1-e^2)}\dot{\theta}, \quad \text{or} \quad \dot{r} = \frac{r^2\dot{\theta}e\sin\theta}{a(1-e^2)}$$

これより $\ddot{r}$ を求め，$\cos\theta$ に式 (1) を用いて r で表すと，

$$\ddot{r} = \frac{r^2\dot{\theta}^2 e\cos\theta}{a(1-e^2)} = \frac{e\cos\theta}{a(1-e^2)r^2}4h^2 = \frac{a(1-e^2)/r-1}{a(1-e^2)r^2}4h^2 = 4h^2\left[\frac{1}{r^3} - \frac{1}{a(1-e^2)r^2}\right]$$

これを式 (6) に用いて，$\dot{\theta} = 2h/r^2$ を考慮すると，

$$F_r = -m\frac{4h^2}{a(1-e^2)r^2} \tag{8}$$

となり，F_r が距離 r の 2 乗に反比例することがわかる。

ここで，この係数 $mh^2/\{a(1-e^2)\}$ について考える。

公転周期

$$T = \frac{(\text{楕円面積})}{h} = \frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{h}$$

をケプラーの第 3 法則式 (3) に用いると，

$$\frac{\pi^2 a^4(1-e^2)}{a^3h^2} = \frac{\pi^2 a(1-e^2)}{h^2} = \text{const.}$$

これを式 (8) に用いて，

$$F_r = -m\frac{4\pi^2/\text{const.}}{r^2} = -\frac{\kappa m}{r^2} \tag{9}$$

となる。ただし，$\kappa = 4\pi^2/\text{const.}$ は全惑星に共通の定数である。式 (9) は太陽が惑星を引く力であるが，太陽もその惑星から同一の力で引かれているので，

$$F_r = -\frac{\kappa m}{r^2} = -\frac{\kappa' M}{r^2}$$

と表されるはずである。したがって F_r は M，m の双方に比例するので，

$$F_r = -G\frac{Mm}{r^2}$$

となり，式 (4) の F_r が得られた。G は万有引力定数である。

1.2　万有引力の法則からケプラーの法則を導く (逆ニュートン問題)

前節とは逆に，運動方程式に重力の法則を用いて，これより惑星の運動を求める [3]。
式 (6)，(7) に式 (4) を用いて，惑星の運動方程式は次式で与えられる。

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2}, \qquad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \tag{10}$$

■面積速度一定則　第 2 式より

$$r^2\dot{\theta} = 2h = \text{const.} \tag{11}$$

つまり，ケプラーの第 2 法則 (面積速度一定則) が得られた。

■軌道　式 (11) の $\dot{\theta}$ を式 (10) の第 1 式に用いて，

$$\ddot{r} - \frac{4h^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2} \tag{12}$$

式 (12) をもとに，惑星の軌道を求める。r は θ を介して t の関数と考える。

$$r = r(\theta(t))$$

このとき，式 (11) より $\dot{\theta} = 2h/r^2$ であるから

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{2h}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -2h\frac{du}{d\theta} \tag{13}$$

ここで，

$$r = \frac{1}{u} \qquad \left(\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\right) \tag{14}$$

と置き換えている。さらに時間で微分して，

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -2h\frac{d^2u}{d\theta^2}\dot{\theta} = -\frac{4h^2}{r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} \tag{15}$$

これを式 (12) に用いて，

$$-\frac{4h^2}{r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{4h^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2}$$

整理して次式となる。

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{4h^2} \tag{16}$$

この解は $u = GM/(4h^2) + A\cos(\theta - \theta_0)$ であるので，

$$r = \frac{1}{u} = \frac{1}{GM/(4h^2) + A\cos(\theta - \theta_0)} = \frac{4h^2/GM}{1 + (4Ah^2/GM)\cos(\theta - \theta_0)}$$

となる。近日点 (楕円の場合 Fig.2 の P_1) で $\theta = 0$ とすると，$\theta_0 = 0$ であり，$4h^2/GM = l$，$4Ah^2/GM = e$ と置き換えて，次式が得られる。

$$r = \frac{l}{1 + e\cos\theta} \tag{17}$$

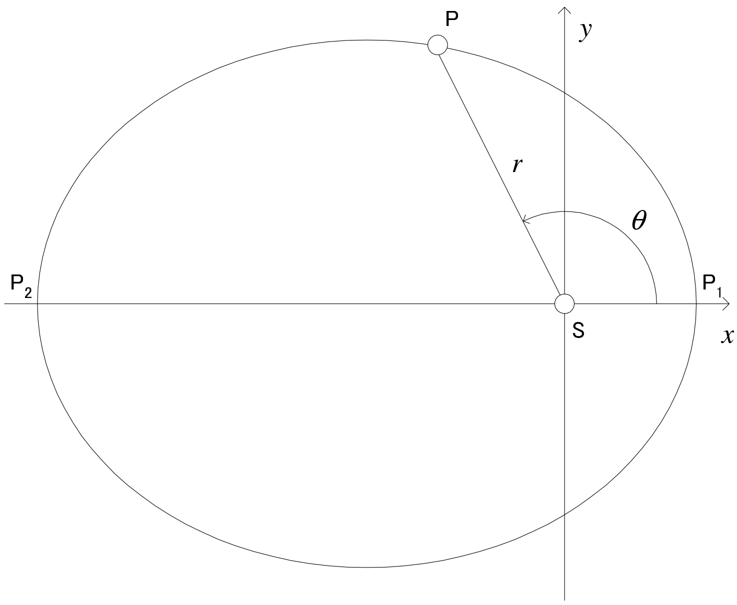

Fig. 2 楕円軌道

これは e の値に応じて，次の円錐曲線を表す。

$$\begin{aligned} e &= 0 && ：円 \\ 0 < e &< 1 && ：楕円 \\ e &= 1 && ：放物線 \\ e &> 1 && ：双曲線 \end{aligned}$$

$0 < e < 1$ のとき，ケプラーの第 1 法則が得られた。

参考までに，l，e と楕円 $(x-c)^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ のパラメータとの間には，次の関係がある。

$$l = a(1-e^2), \qquad e = c/a$$

■惑星位置の時間変化　惑星の軌道の式 (17) では惑星位置の時間変化が分からないので，軌道半径 r と時間 t の関係を求める方法を考える。

式 (17) より，

$$\ddot{r} = \frac{4h^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2}$$

この両辺にそれぞれ $\dot{r}dt = dr$ をかけて積分 (エネルギー積分) すると，

$$\int \dot{r}\frac{d\dot{r}}{dt}dt = \int \left(\frac{4h^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2}\right) dr$$

つまり

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{2h^2}{r^2} - \frac{GM}{r} = E \tag{18}$$

が得られる。この第 1 項，第 2 項は半径方向，円周方向の単位質量あたりの運動エネルギー，第 3 項は単位質量あたりの重力ポテンシャルエネルギー (負値) を表しており，この式はこれらの和が一定であるとのエネルギー保存則を表している。

式 (18) の第 2 項と第 3 項の和を

$$W(r) = \frac{2h^2}{r^2} - \frac{GM}{r} \tag{19}$$

と置くと，これは遠心力と重力のポテンシャルエネルギーを表すと考えることができ，Fig.3 のような形状となる。

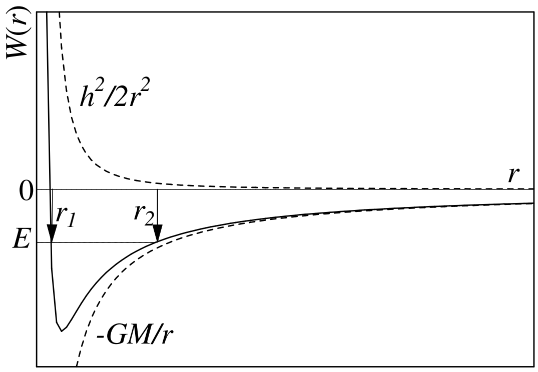

Fig. 3 遠心力と重力のポテンシャル

$E < 0$ の場合には，図のように軌道半径が $r_1 \leq r \leq r_2$ の範囲に限定され，この状態が楕円軌道に対応していると考えられる。以下，楕円を対象に解を求める。

式 (18) より，

$$\frac{dr}{dt} = \pm \frac{\sqrt{2Er^2 + 2GMr - 4h^2}}{r}$$

つまり，r と t の関係を表す微分方程式

$$dt = \pm \frac{rdr}{\sqrt{2Er^2 + 2GMr - 4h^2}} \tag{20}$$

が得られる。

分母の平方根の中の式を考える。

$$\begin{aligned} 2Er^2 + 2GMr - 4h^2 &= 2E\left\{r + \frac{GM}{2E}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{8Eh^2}{G^2M^2}}\right)\right\}\left\{r + \frac{GM}{2E}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8Eh^2}{G^2M^2}}\right)\right\} \\ &= -2E\left\{r - a(1-e)\right\}\left\{a(1+e) - r\right\} \\ &= -2E(r - r_1)(r_2 - r) \end{aligned}$$

ただし，

$$a = -\frac{GM}{2E} \tag{21}$$

$$e^2 = 1 - \frac{-8Eh^2}{G^2M^2} \tag{22}$$

$$r_1 = a(1-e) \tag{23}$$

$$r_2 = a(1+e) \tag{24}$$

である。楕円の場合，a，e は長半径，離心率に一致している。

a，e を用いると，式 (20) は

$$dt = \pm\frac{rdr}{\sqrt{-2E}\sqrt{\{r-a(1-e)\}\{a(1+e)-r\}}}$$

となり，$r = a(1-e\cos u)$ と置き換える[*1]と

$$dt = \pm\frac{a(1-e\cos u)ae\sin u du}{\sqrt{-2E}\sqrt{ae(1-\cos u)ae(1+\cos u)}} = \pm\frac{a}{\sqrt{-2E}}(1-e\cos u)du \tag{26}$$

となる。$t=0$ で $u=0$ として積分すると，

$$t = \frac{a}{\sqrt{-2E}}(u - e\sin u) \tag{27}$$

が得られる。複合のうち，負号は意味をなさない。

1 周期は $u = 0 \sim 2\pi$ に対応するため，周期は

$$T = \frac{2\pi a}{\sqrt{-2E}} \tag{28}$$

平均角速度は

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\sqrt{-2E}}{a} \tag{29}$$

---

*1 Fig.4 のように，楕円軌道の半径 r を外接円と中心角 u を用いて表すと，

$$\begin{aligned} r^2 = \overline{\mathrm{PS}}^2 &= \left(\overline{\mathrm{OS}} - \overline{\mathrm{OQ}}\cos u\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\times\overline{\mathrm{OQ}}\sin u\right)^2 \\ &= (c - a\cos u)^2 + (\frac{b}{a}\times a\sin u)^2 = (a\sqrt{1-e^2} - a\cos u)^2 + (\frac{a\sqrt{1-e^2}}{a}\times a\sin u)^2 \\ &= a^2(1-2e\cos u + e^2\cos^2 u) = a^2(1-e\cos u)^2 \end{aligned}$$

したがって，$r = a(1-e\cos u)$ と表されることがわかる。

一方，式 (17) より

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

であるので，両者を等しいと置いて，

$$a(1-e\cos u) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

つまり，θ と u は次式

$$\cos\theta = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u} \tag{25}$$

で換算できる。

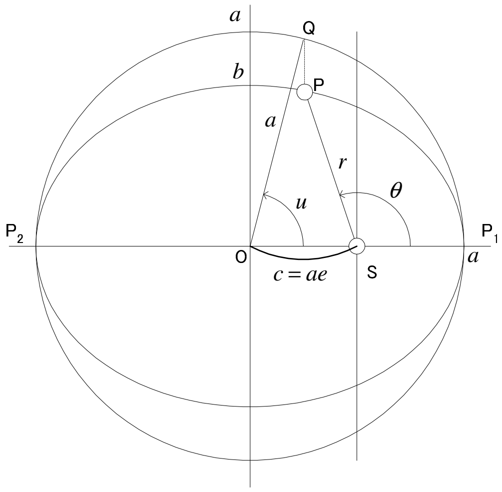

Fig. 4 座標変換 $r = a(1 - e\cos u)$

したがって式 (27) を上の平均角速度 ω を用いて表すと，

$$\omega t = \frac{\sqrt{-2E}}{a} t = u - e\sin u \tag{30}$$

となる。式 (27) または (30) は**ケプラー方程式**とよばれている。

式 (28) に式 (21) の E を用いると，

$$T = \frac{2\pi a}{\sqrt{GM/a}}$$

したがって

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{const.} \tag{31}$$

となり，ケプラーの第 3 法則 が得られる。

以上の解析をもとにして，解 $\theta(t)$, $r(t)$ は以下のように求まる。

(1) 初期条件 ($t = 0$) として，近日点での軌道半径 $r = r_0$ と速度 $v = v_0$ を与える ($\dot{r} = 0$)。

(2) 式 (11)，(18) より h，E を求める。

$$h = \frac{1}{2} r_0^2 \theta_0 = \frac{1}{2} r_0 v_0, \qquad E = \frac{2h^2}{r_0^2} - \frac{GM}{r_0}$$

(3) 式 (21)， (22) より楕円のパラメーター a，e を求める。

$$a = -\frac{GM}{2E}, \qquad e^2 = 1 - \frac{-8Eh^2}{G^2M^2}$$

(4) t を与える。

(5) $\omega = \sqrt{-2E}/a$ を用いて，式 (30) を満たす u を求める。

(6) この u を式 (25) に用いて，θ を求める。

(7) 式 (17) より r を求める。

2　複合振子の等価長さ

重り C，D が軽い剛体棒 CDA につながれ，紙面内で A を中心にして振動するとき，それと同じ周期の単一の振子の長さを求めること。

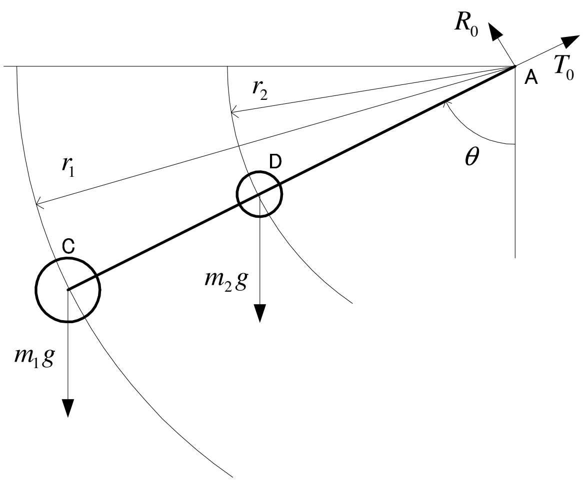

Fig. 5　複合振子

■剛体としての扱い　支点 A 回りの回転運動の式 (角運動量式) より

$$J_A\ddot{\theta} = -r_1 \times m_1 g \sin\theta - r_2 \times m_2 g \sin\theta \tag{32}$$

$$J_A = m_1 {r_1}^2 + m_2 {r_2}^2 \tag{33}$$

ただし，J_A は A 点回りの慣性モーメントである。

これより，運動方程式は

$$(m_1 {r_1}^2 + m_2 {r_2}^2)\ddot{\theta} + (m_1 r_1 + m_2 r_2) g \sin\theta = 0$$

$\theta << 1$ rad として，$\sin\theta \sim \theta$ の近似により，

$$\ddot{\theta} + \frac{(m_1 r_1 + m_2 r_2) g}{m_1 {r_1}^2 + m_2 {r_2}^2}\theta = 0 \tag{34}$$

となる。一方，長さ x の単振子の運動方程式は同様にして，

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{x}\theta = 0 \tag{35}$$

となるので，両者を比較して等価長さ x は

$$x = \frac{m_1 {r_1}^2 + m_2 {r_2}^2}{m_1 r_1 + m_2 r_2} \tag{36}$$

となる。

■2 質点としての扱い Fig.6 のように，複合振子を 2 個の重りと棒とに分けて力のつり合いを考える。

重り m_1 には重力 m_1g と棒からの中心力 T_1 と接線力 R_1 が作用し，重り m_2 には重力 m_2g と棒からの中心力 T_2 と接線力 R_2 が作用する。

対して、棒には重りの位置 C、D に重りからの反作用力 T_1, R_1，T_2, R_2 および支点位置 A に T_0, R_0 が作用する。これらは重りに働く力と向きが逆となる。

重り 1 の半径方向、接線方向の運動方程式は次式となる。

$$-m_1\frac{(\dot{\theta})^2}{r_1} = m_1 g\cos\theta - T_1 \tag{37}$$

$$m_1 r_1\ddot{\theta} = -m_1 g\sin\theta - R_1 \tag{38}$$

同様に、重り 2 の半径方向、接線方向の運動方程式は次式となる。

$$-m_2\frac{(\dot{\theta})^2}{r_2} = m_2 g\cos\theta - T_2 \tag{39}$$

$$m_2 r_2\ddot{\theta} = -m_2 g\sin\theta + R_2 \tag{40}$$

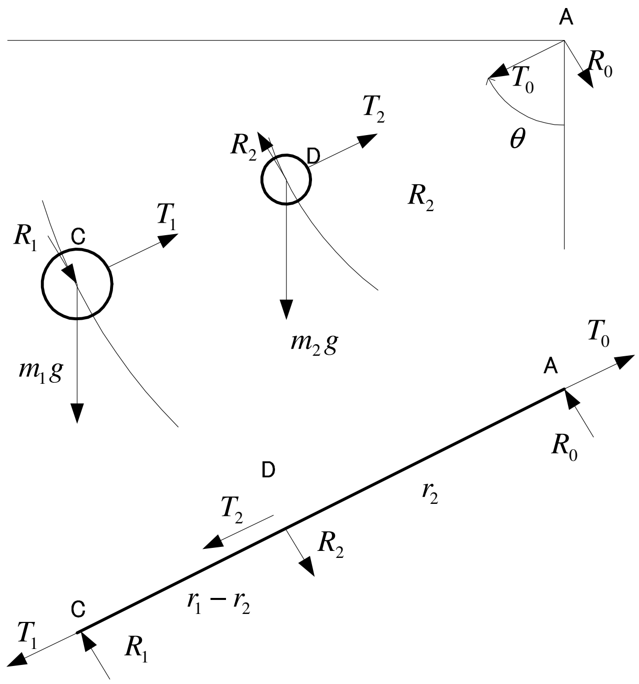

Fig. 6 重りと棒に働く力

また、棒の半径方向、接線方向の力のつりあいは、次式となる。

$$T_1 + T_2 - T_0 = 0 \tag{41}$$

$$R_1 - R_2 + R_0 = 0 \tag{42}$$

剛体としての棒の支点 A 点回りの力のモーメントのつりあいより、次式が得られる。

$$r_1 R_1 - r_2 R_2 = 0 \tag{43}$$

式 (38)，(40) を (43) に用いて R_1，R_2 を消去すると，

$$(m_1 {r_1}^2 + m_2 {r_2}^2)\ddot{\theta} + (m_1 r_1 + m_2 r_2) g\sin\theta = 0$$

次式が得られる。ここで、 $\theta << 1$ rad のもとで，$\sin\theta \simeq \theta$ として、式 (34) が得られる[*2]。

[*2] 運動方程式 (34) の解 $\theta(t)$ が求まると、式 (37)〜(40) より T_1, R_1, T_2, R_2 が求まり、さらに、式 (41)、(42) より T_0, R_0 が求まる。

3　動く斜面上の小物体の落下

斜面の水平方向移動量を左向きに X，斜面に沿う小物体の相対的な移動量を斜面に沿って s とすると，小物体の絶対座標 (x, y) は次式で表される。

$$x = -X + s\cos\theta, \qquad y = -s\sin\theta \tag{44}$$

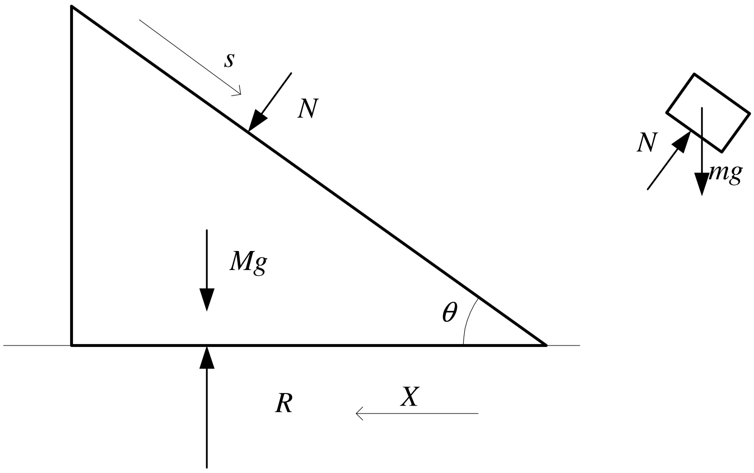

Fig. 7　斜面と小物体の力のつり合い

step 1：対象とする物体を取り出す (切り出す)。　Fig.7 のように，斜面と小物体を分けて取り出す。

step 2：対象に働く力を全て描き出す。　斜面には，重力 Mg，小物体から受ける力 N，床面から受ける力 R が図のように作用する。小物体には，重力 mg，斜面から受ける力 N が図のように作用する。

step 3：力のつりあい式 (または運動方程式) を立てる。　斜面の水平方向および鉛直方向の運動方程式は次式である。

$$M\frac{d^2X}{dt^2} = N\sin\theta \tag{45}$$

$$-Mg - N\cos\theta + R = 0 \tag{46}$$

また，小物体の水平方向および鉛直方向の運動方程式は，式 (44) を用いて次式となる。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\left(-\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{d^2s}{dt^2}\cos\theta\right) = N\sin\theta \tag{47}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -m\frac{d^2s}{dt^2}\sin\theta = N\cos\theta - mg \tag{48}$$

式 (45) の N を式 (47)，(48) に用いて，

$$(M+m)\frac{d^2X}{dt^2} - m\frac{d^2s}{dt^2}\cos\theta = 0, \qquad M\frac{d^2X}{dt^2}\cos\theta + m\frac{d^2s}{dt^2}\sin^2\theta = mg\sin\theta$$

これより

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{m\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}g \tag{49}$$
$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{(M+m)\sin\theta}{M+m\sin^2\theta}g \tag{50}$$

となる。斜面は等加速度運動し，小物体も斜面に対して相対的に等加速度運動する。

斜面の初期静止位置を原点とすれば，斜面の座標の時間変化は次式で表される。

$$X = \frac{1}{2}\frac{m\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}gt^2 \tag{51}$$

小物体の絶対座標の変化は，式 (44) に式 (49)，(50) を用いて

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{d^2s}{dt^2}\cos\theta = \frac{M\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}g \tag{52}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{d^2s}{dt^2}\sin\theta = -\frac{(M+m)\sin^2\theta}{M+m\sin^2\theta}g \tag{53}$$

で表される。初期静止位置を原点とすれば，小物体の座標の時間変化は

$$x = \frac{1}{2}\frac{M\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}gt^2 \tag{54}$$
$$y = -\frac{1}{2}\frac{(M+m)\sin^2\theta}{M+m\sin^2\theta}gt^2 \tag{55}$$

となる。つまり，小物体は 直線

$$y = -\frac{(M+m)\sin\theta}{M\cos\theta}x \tag{56}$$

に沿って，加速度

$$\alpha = \sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2} = \frac{\sqrt{M^2\cos^2\theta+(M+m)^2\sin^2\theta}}{M+m\sin^2\theta}g\sin\theta \tag{57}$$

の等加速度運動をすることがわかる。

また斜面と小物体を合わせた重心の x 座標は，式 (51)，(54) を用いて

$$\bar{x} = \frac{-MX+mx}{M+m} = 0 \tag{58}$$

となり，変化しない。これは，両物体へ働く外力が重力と床面からの抗力だけであり，水平成分を持たないことの当然の結果である。

参考文献

[1] 山本義隆, "**重力と力学的世界**", 現代数学者 (1981).

[2] 山本義隆, "**古典力学の形成** (**ニュートンからラグランジュへ**)", 日本評論社 (1997).

[3] 戸田盛和， "**物理入門コース 1 力学**"， 岩波書店 (1982).