３． ニュートン以降の力学の確立
(特別講義:科学技術史)

S. Yamauchi

2016 年 9 月 13 日

.

Question:

(1) 微積分法は、だれが見出して考案したのか？

(2) 力学の本質とは何か？

(3) 現在の力学を確立したのはだれか？

1　微分法と運動方程式

ゴットフリート・ヴィルヘルム・ライプニッツ (1646-1716)

近世の大陸合理主義を代表する哲学者。ドイツ (神聖ローマ帝国)、ライプツィヒ出身の哲学者、数学者、科学者であり、幅広い分野で活躍した学者・思想家として知られる。

17 世紀の様々な学問を統一、体系化しようとした。その業績は法典改革、モナド論、微積分法、微積分記号の考案、論理計算の創始、ベルリン科学アカデミーの創設等、多岐にわたる。

微積分法をアイザック・ニュートンとは独立に発見・発明し、その優れた記号法を与えた。

ニュートンとライプニッツの間の二つの確執。

１． 惑星の運動に関するライプニッツの論文は剽窃か？

ニュートン:1687 年「プリンキピア」を発表

ライプニッツ:1689 年「惑星の運動の原因についての試論」を発表。

中心力のもとでの運動方程式を微分方程式としてはじめて表現

ニュートンが幾何学的に求めた万有引力の法則を解析的に求めた。

ライプニッツの主張：「プリンキピアの書評」(1688) で知り、

「それ以前に考えた内容」をまとめた。

$\longrightarrow$ 後年、ライプニッツ書き込みの「プリンキピア」初版が発見。

２． 微積分法はどちらが先に考案したか？

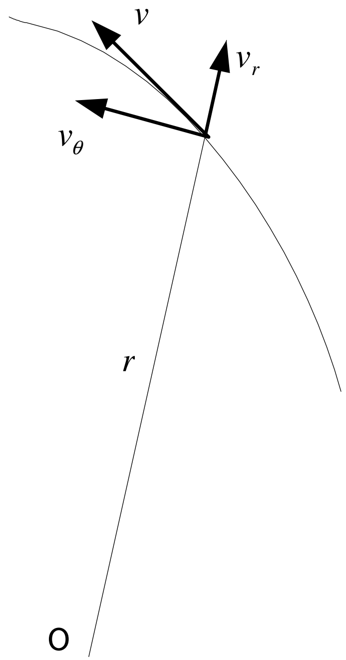
微積分の基礎となる無限小量を用いた解析法

1666 年頃：ニュートンが「流率法」$(\dot{x})$ を考案 (未発表)
1675-76 年：ライプニッツが微積分の記号法 $(dx, \int)$、計算法を確立 (未発表)
1684 年：ライプニッツが論文「極大・極小に関する新方法」を発表
1704 年：ニュートンが「曲線の求積について」(『光学』の付録) を刊行。

両者の弟子・同僚間で 1699 年に論争が開始、1711 年頃激化。
ライプニッツ死去 (1716) 後も継続。

現在では、両者はそれぞれ独立に微積分法を発見した、とされている。

ライプニッツによる惑星運動



惑星の速度 v を成分に分けて、
半径方向成分 v_r**、周方向成分** v_θ **で表す。**
遠心力 (見かけ上の力) は、

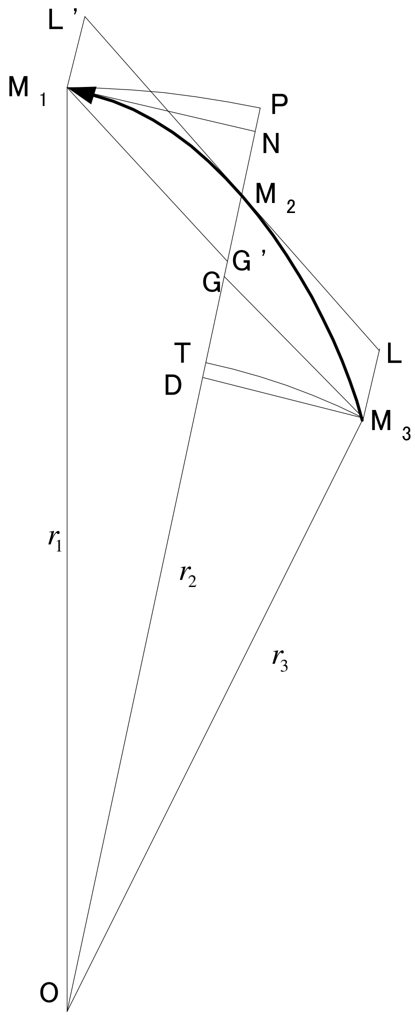
$$f_C(r) = \frac{v_\theta^2}{r} \qquad \text{(円運動でなくても成立)}$$

面積速度 $h = \frac{1}{2} v_\theta r$ **を用いて表すと、**

$$f_C(r) = \frac{(2h)^2}{r^3}$$

微小時間 dt **間における** r **の変化量を** dr **と表し、**
dr **の変化量を** $d(dr) = d^2 r$ **と表すと、(次ページ)**

ライプニッツによる惑星運動 (つづき)



向心力を $f_G(r)$ とすると、半径方向運動方程式は

$$d^2 r = \{f_C(r) - f_G(r)\}\, dt^2 = \left\{ \frac{v_\theta^2}{r} - f_G(r) \right\} dt^2$$

面積速度一定の場合は、$h = \frac{1}{2} v_\theta r$ より

$$d^2 r = \left\{ \frac{(2h)^2}{r^3} - f_G(r) \right\} dt^2$$

ライプニッツは、楕円軌道を描くとして、
この式から向心力を解析的に求めた。

$$f_G(r) = \frac{a(2h)^2}{b^2} \cdot \frac{1}{r^2} \propto \frac{1}{r^2}$$

順ニュートン問題 & 逆ニュートン問題

(順ニュートン問題)

$\Longrightarrow$

惑星の軌道 (ケプラーの法則) **運動方程式 (万有引力の法則)**

$\Longleftarrow$

(逆ニュートン問題)

(1) **楕円軌道の法則**

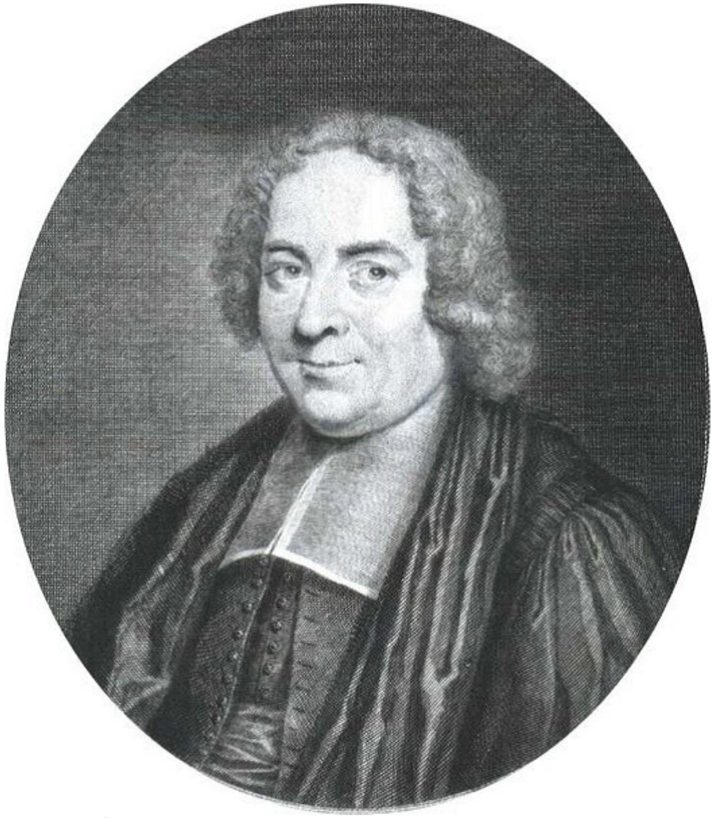
(2) **面積速度一定の法則**

(3) **調和 $(T^2 \propto a^3)$ の法則**

$$d^2 r = \left\{ \frac{(2h)^2}{r^3} - f_G(r) \right\} dt^2$$

$$f_G(r) \propto \frac{1}{r^2}, \qquad \text{etc.}$$

ピエール・ヴァリニョン (Pierre Varignon, 1654-1722)



フランス北西部の都市カーン生まれ。
カーン大学等で学ぶ。

コレージュ・マザラン、
コレージュ・ロワイエの数学教授。
パリ科学アカデミーの会員

フランスにおける微分法の先駆者。
数学や静力学で「ヴァリニョンの定理」あり。

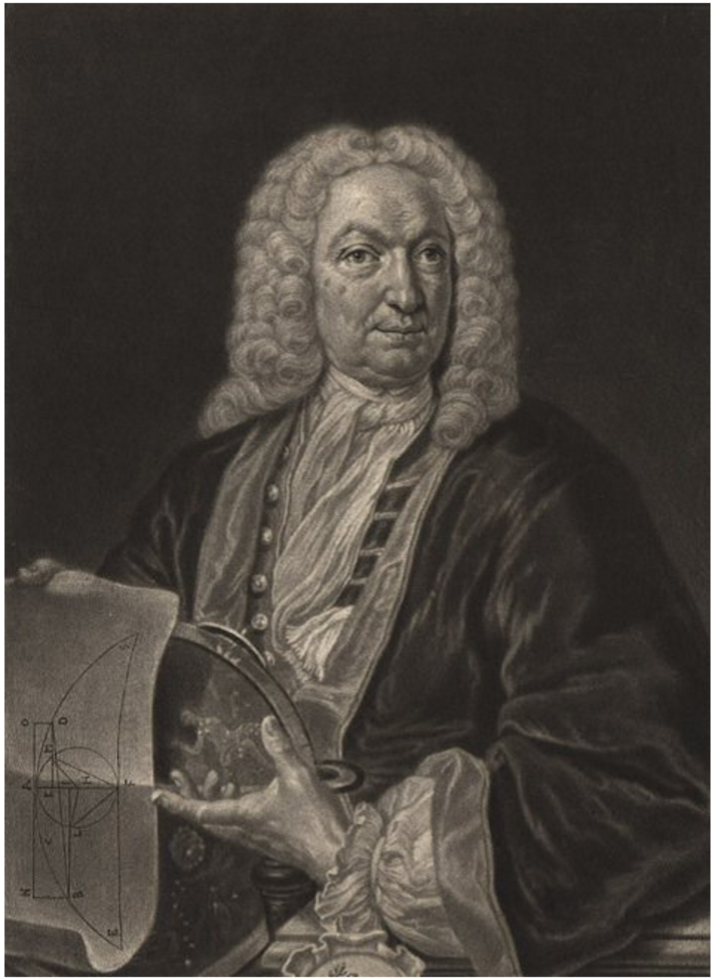
1692 年にパリで、ヨハン・ベルヌーイから微積分を学んだ。
『プリンキピア』の一連の命題を，ライプニッツ流の微分法で解析的に証明。

ヤコブ・ヘルマン (Jakob Hermann, 1678-1733)

ヘルマンはスイス北部のバーゼル生まれ。
バーゼル大学でヤコブ・ベルヌーイに学び，
ヤコブを介してライプニッツとも交流。
1701 年にベルリンアカデミーのメンバー。
1707 年からパドヴァ大学 (イタリア)、
1713 年からフランクフルト (ドイツ)、
1724 年からペテルブルク (ロシア) アカデミーで数学教授を勤め、
1731 年からバーゼルで倫理学と自然法担当。
初期の力学書 Phoronomia も出版。
L. オイラーはヘルマンの遠い親戚。

ヨハン・ベルヌーイとは独立に、デカルト座標で逆ニュートン問題を解いた。

ヨハン・ベルヌーイ (Johann Bernoulli，1667-1748)



バーゼル市の指導者ニコラスの 10 番目の子。
兄にヤコブがおり、ダニエルは息子。

ロピタルの定理 (微分の平均値定理) の発見、
懸垂線問題の解、重力場での質点の運動、
指数関数の微積分法、その他多数。

バーゼルで兄ヤコブより学ぶも、後には衝突。
バーゼルでギリシア語の教授に就き，
ヤコブの死後，数学の教授。

オイラー、息子ダニエルを含め、弟子多数。
ダニエルとも、いさかい絶えず。

ヘルマンとは独立に、曲座標で逆ニュートン問題を解いた。

ダニエル・ベルヌーイ (Daniel Bernoulli, 1700-1782)

父ヨハンがオランダ赴任中にフローニンゲンで生まれ、スイスバーゼルで育った。
父親が数学者になることを嫌ったため，
バーゼル大学で哲学と論理学を学び，
その後、ドイツ各地で医学を学び，
解剖学と植物学で学位を取得。
1724 年にはペテルブルクで数学教授。
1733 年バーゼル大学の植物学・物理学教授。
重要な著書は『Hydrodynamica』(1738)。
ベルヌーイの定理、等。流体力学の基礎。
その他に、リッカチ微分方程式の解、潮汐理論、弦振動の解、気体分子運動論等に貢献。
父との間に緊張が絶えず、オイラーとは親交。

ダニエル・ベルヌーイはエネルギー積分を明示的に示し，積極的に利用した。

ベルヌーイ一族

初代	2 代	3 代	4 代
ニコラス (1623-1708)	**ヤコブ** (1654-1705)		
	ニコラス (1662-1716; **画家**)	**ニコラス** (1687-1759; **数学**)	
	ヨハン (1667-1748)	**ニコラス** (1695-1726; **数学**) **ダニエル** (1700-1782) **ヨハン** (1710-1790; **数学**, **物理**)	**ヨハン** (1744-1807; **天文学**) **ヤコブ** (1759-1789; **物理**)

レオンハルト・オイラー (Leonhard Euler, 1707-1783)

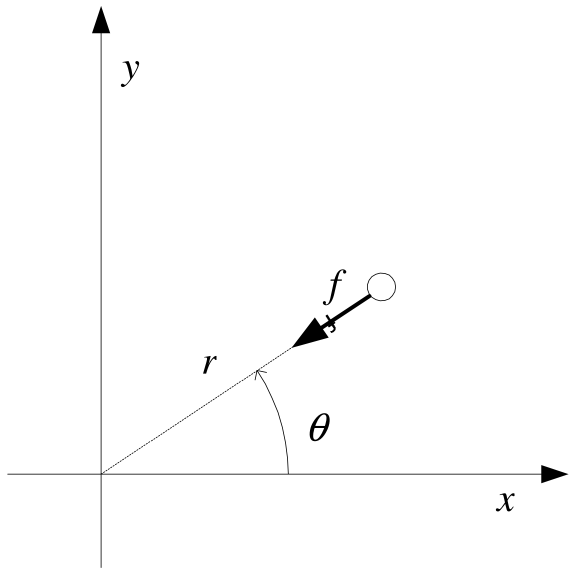
スイスのバーゼルに生まれ，
バーゼルでダニエルと共にヨハンに学ぶ。
1727 年，ペテルブルクアカデミーに赴任
1741 年，ベルリン・アカデミーへ移るが、
1766 年ごろペテルブルクへ戻る。
後年視力を失うが、研究生活を続けた。
数学の各分野で多くの貢献あり，
今日の数学記号の多くが彼に由来。

$\sum$, i, e, 関数概念 $f(x)$，etc.

解析学の威力は，特に力学の分野で発揮，
天体力学，力学原理，剛体力学，流体力学など多岐に及ぶ。

オイラーは、極座標での運動方程式を一般的な形で導き、それをもとに、
万有引力のもとでの惑星の運動を求めた (逆ニュートン問題を完結)。

オイラーによる極座標での運動方程式 $\leftarrow$ (運動方程式を基礎にすべし)



$x-y$ 座標での運動方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{x}{r}f, \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{y}{r}f$$

次式で $r-\theta$ 座標へ変換

$$x=r\cos\theta, \qquad y=r\sin\theta$$

半径方向・周方向の成分に分けると、

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=-f \qquad \text{(半径方向)}$$

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0 \qquad \text{(周方向)}$$

運動方程式の積分

周方向の運動方程式に r をかけて変形

$$r^2\frac{d^2\theta}{dt^2}+2r\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}=\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0$$

つまり $r^2\dfrac{d\theta}{dt}=r^2\dot{\theta}=A=\mathrm{const.}$ **(面積速度一定；ケプラーの第 2 法則)**

これを半径方向の運動方程式に用いて

$$\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{A^2}{r^3}=-f$$

$dr=(dr/dt)dt$ **をかけて積分 (エネルギー積分)**

$$\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}_{r\ \text{方向運動エネルギー}}+\underbrace{\frac{1}{2}\frac{A^2}{r^2}}_{\frac{1}{2}(r\dot{\theta})^2;\theta\text{方向運動エネルギー}}+\underbrace{\int^r f\,dr}_{\text{引力のポテンシャルエネルギー}}=E$$

解法の方針

前頁式より

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2E - \frac{A^2}{r^2} - 2\int^r f dr}$$

$U(r) = \int^r f(r)dr$ **が与えられると、**

$$dt = \frac{rdr}{\sqrt{2(E-U)r^2 - A^2}}$$

より、 $r(t)$ **が求まる。**
さらに、面積速度一定より、

$$d\theta = \frac{A}{r^2}dt = \frac{Adr}{r\sqrt{2(E-U)r^2 - A^2}}$$

これより $\theta(r) = \theta(r(t))$ **が求まる。**

逆 2 乗則に従う引力のもとでの運動

引力を $f(r) = \frac{\kappa}{r^2}$ とすると

$$U(r) = \int_\infty^r f dr = \int_\infty^r \frac{\kappa}{r^2} dr = -\frac{\kappa}{r}$$

これを用いて、

$$dt = \frac{r dr}{\sqrt{2Er^2 + 2\kappa r - A^2}} = \frac{r dr}{\sqrt{2|E|\{(ae)^2 - (r-a)^2\}}}$$

$$d\theta = \frac{A dr}{r\sqrt{2Er^2 + 2\kappa r - A^2}} = \frac{A dr}{r\sqrt{2|E|\{(ae)^2 - (r-a)^2\}}}$$

ただし、$a = -\dfrac{\kappa}{2E} = \dfrac{\kappa}{2|E|}, \quad e = \sqrt{1 - \frac{2|E|A^2}{\kappa^2}}$

$r \longrightarrow u$ の座標変換

さらに $r - a = -ae\cos u$ と置き ($dr = ae\sin u\ du$)、r を u に座標変換

第 1 式 $r(t) \rightarrow u(t)$

$$dt = \frac{1}{\sqrt{|2E|}} a(1 - e\cos u)du$$

$t = 0$ で $u = 0$(近日点) として積分

$$t = \frac{a}{\sqrt{|2E|}}(u - e\sin u) = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\kappa}}(u - e\sin u) \qquad (\text{ケプラー方程式})$$

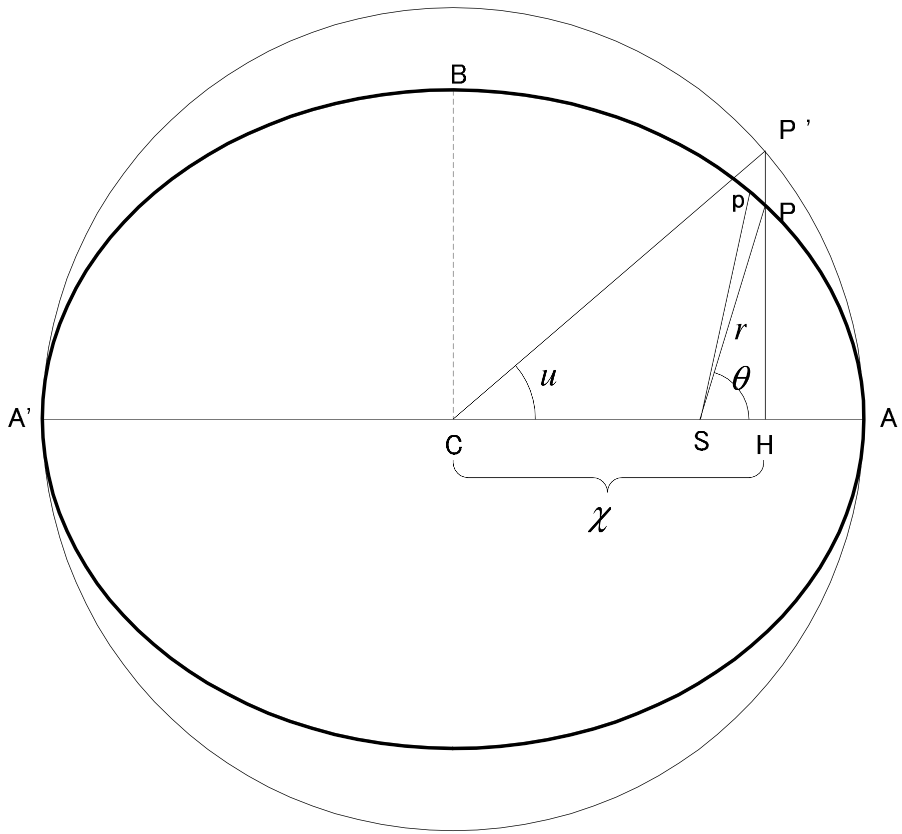
第 2 式 $\theta(r) \rightarrow \theta(u)$

$$d\theta = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e\cos u} du$$

$\theta = 0$ で $u = 0$、$\theta > 0$ で $u > 0$ となる解は

$$\cos\theta = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u}$$

$r \to u$ の座標変換の図解　　$r = a(1 - e\cos u)$



図の楕円で次の関係あり。

$$\overline{CA} = a, \quad \overline{CB} = b, \quad e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$$

$$b = a\sqrt{1 - e^2}, \qquad \overline{CS} = ae$$

一方、

$$\overline{PH} = (b/a)\overline{P'H} = \sqrt{1 - e^2}\sqrt{a^2 - \chi^2}$$

$$\overline{SH} = \overline{CH} - \overline{CS} = \chi - ae$$

したがって

$$r = \overline{SP} = \sqrt{\overline{PH}^2 + \overline{SH}^2} = a - e\chi$$

$$= a(1 - e\cos u)$$

楕円軌道の確認 $r(\theta)$

第 2 式の解 $\theta(u)$ を書き直して、$\cos u = \frac{e+\cos\theta}{1+e\cos\theta}$
これを $r = a(1-e\cos u)$ に用いて

$$r(\theta) = a\left(1 - e\frac{e+\cos\theta}{1+e\cos\theta}\right) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

これは、長径 a 、離心率 e の楕円 (ケプラーの第 1 法則)

楕円軌道の周期

$r = a(1-e\cos u)$ より、$r(u)$ は u に関して周期 2π の周期関数
ケプラー方程式より、u の 2π の増加は t の $2\pi\frac{a^{3/2}}{\sqrt{\kappa}}$ の増加に対応
従って、$r(t)$ は t に関して周期 $2\pi\frac{a^{3/2}}{\sqrt{\kappa}}$ の周期関数 (ケプラーの第 3 法則)

運動方程式から、惑星の運動 (ケプラーの法則) が全て求まった。

2　地上の拘束運動

ヤコブ・ベルヌーイ (Jakob Bernoulli，1654-1705)

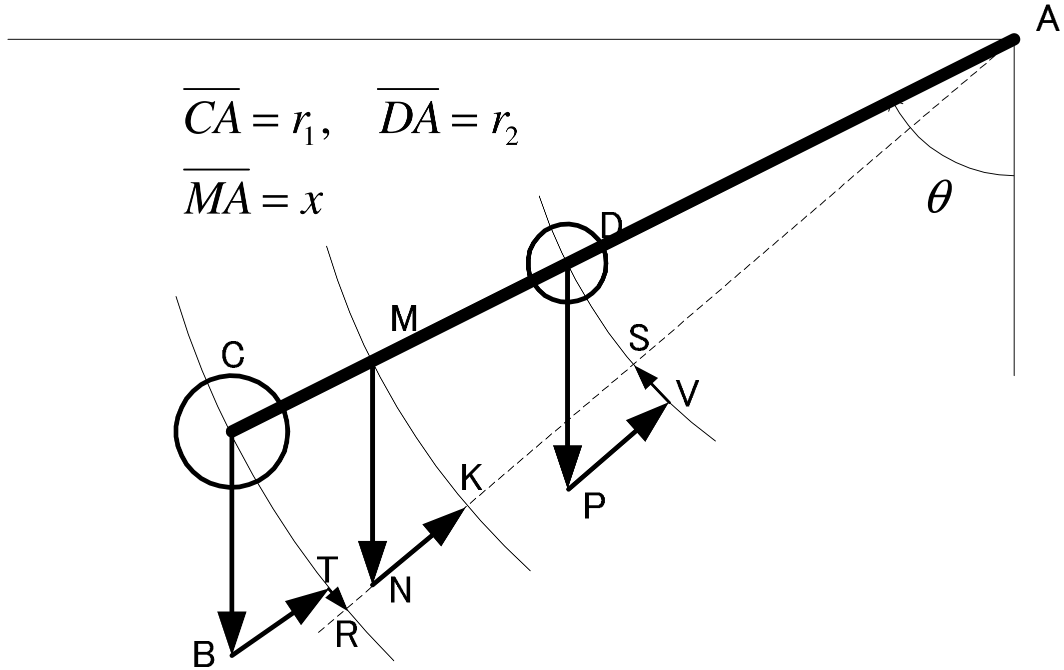
スイスの**バーゼル**出身の数学者・物理学者。
ヨハン・ベルヌーイの兄。
1676 年に英国で**ボイル**と**フック**に会い，科学と数学の道へ進む。

1682 年からバーゼル大学で教鞭をとり、
1687 年より同大学の数学の教授。
ライプニッツと交流し、微積分を学ぶ。
弟ヨハンと共同研究したが、後不仲となる。
ベルヌーイ試行、ベルヌーイ数は、
ヤコブにちなんで称される。

ヤコブ・ベルヌーイは**拘束運動**の扱い方の先鞭をつけた。

問題：複合振子 (剛体振子) の等価長さ　　↓ (これ以降は、力学演習)

単振子の周期: $T = 2\pi\sqrt{(\text{長さ})/(\text{重力加速度})} = 2\pi\sqrt{l/g}$



重り C，D が
軽い棒 CDA に繋がれ，
A を中心にして
紙面内で振動する。

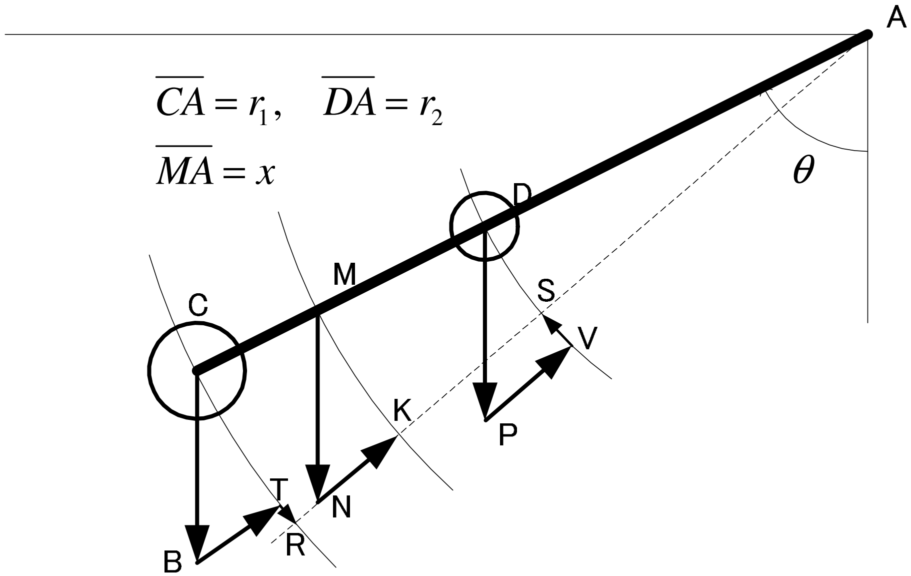
それと同じ周期の
単振子の長さは？

重り C，D の質量： m_1, m_2

振子の長さ： $\overline{CA} = r_1,\ \overline{DA} = r_2$

等価な単一振子の長さ： $\overline{MA} = x$ **と表す。**

A 案：ヤコブ・ベルヌーイの解法



錘の運動を，3 方向へ分ける。

	重力による運動	回転中心への運動	円周方向への運動
重り 1	$\overline{CB}$	$\overline{BT}$	$\overline{TR}$
等価錘	$\overline{MN}$	$\overline{NK}$	0
重り 2	$\overline{DP}$	$\overline{PV}$	$\overline{VS}$

重力による運動は皆等しい。 $\overline{CB} = \overline{MN} = \overline{DP}$

$\triangle CBT \equiv \triangle MNK \equiv \triangle DPV$ ゆえ、 $\overline{CT} = \overline{MK} = \overline{DV}$

A を中心とした回転運動ゆえ、 $\overline{CR} : \overline{MK} : \overline{DS} = r_1 : x : r_2$

したがって、

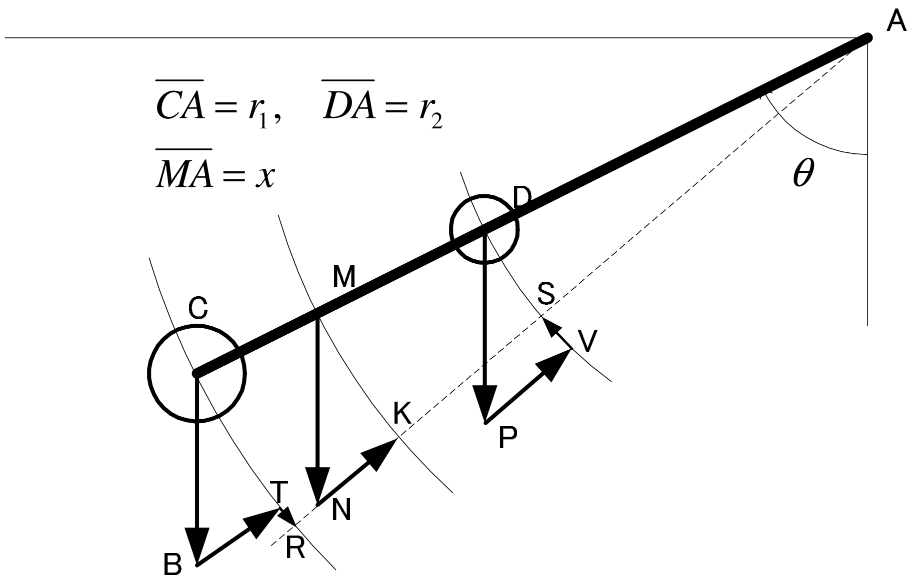
$$\overline{TR} = \overline{CR} - \overline{CT} = \overline{MK}\frac{r_1}{x} - \overline{MK} = \overline{MK}\left[\frac{r_1}{x} - 1\right]$$

$$\overline{VS} = \overline{DV} - \overline{DS} = \overline{MK} - \overline{MK}\frac{r_2}{x} = \overline{MK}\left[1 - \frac{r_2}{x}\right]$$

一方，てこの原理より，

$$m_1\overline{TR} \times r_1 = m_2\overline{VS} \times r_2$$

であるので、



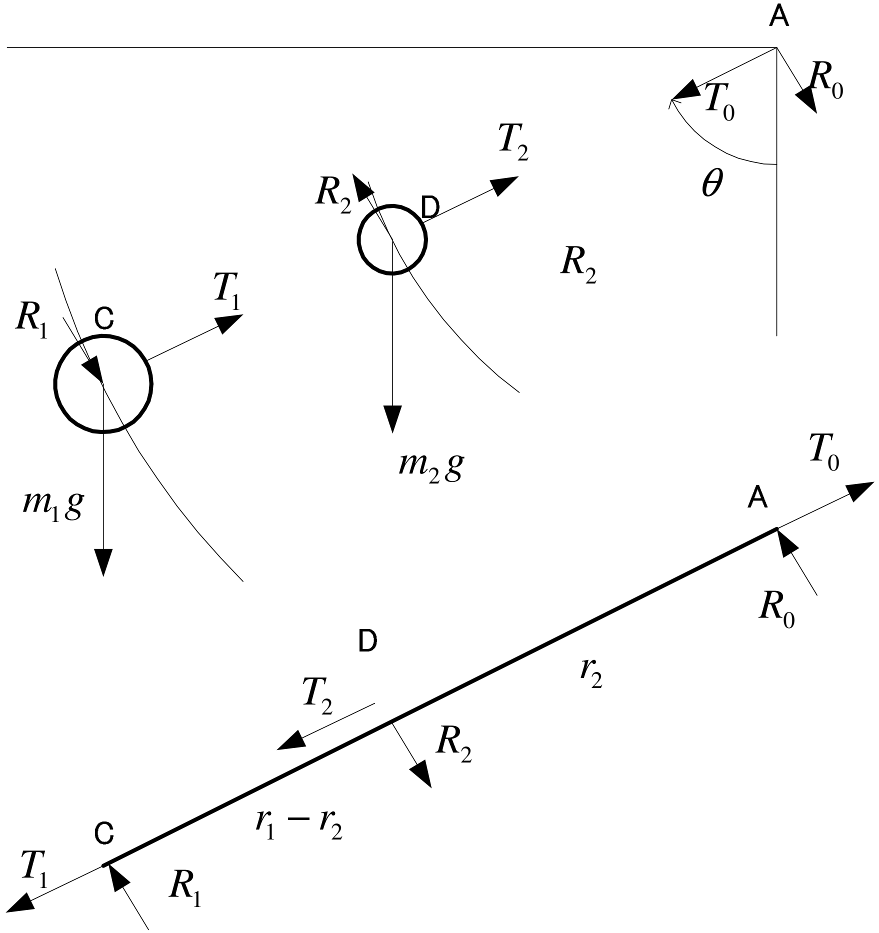
$$m_1\overline{MK}\left(\frac{r_1}{x} - 1\right) r_1 = m_2\overline{MK}\left(1 - \frac{r_2}{x}\right) r_2$$

これより，等価長さ x は

$$x = \frac{m_1{r_1}^2 + m_2{r_2}^2}{m_1 r_1 + m_2 r_2}$$

Ｂ 案：2 質点としての現代的扱い

複合振子を 2 個の重りと棒とに分けて力のつり合いを考える。



step 1：**対象物体を取り出す。**

重り 1、**重り** 2、**棒**、(**ヒンジ**)

step 2：**対象に働く力を描く。**

重り m_1 **の力**：$m_1 g,\ T_1,\ R_1$

重り m_2 **の力**：$m_2 g,\ T_2,\ R_2$

棒の力：

$$\underbrace{T_1, R_1}_{\text{重り 1 の反作用}} \quad , \quad \underbrace{T_2, R_2}_{\text{重り 2 の反作用}} \quad , T_0, R_0$$

step 3：運動方程式 (またはカのつりあい式) を立てる。

重り 1 の運動方程式：

$$-m_1\frac{(\dot{\theta})^2}{r_1}=m_1g\cos\theta-T_1 \qquad \text{(半径方向)}$$

$$m_1r_1\ddot{\theta}=-m_1g\sin\theta-R_1 \qquad \text{(接線方向)}$$

重り 2 の運動方程式：

$$-m_2\frac{(\dot{\theta})^2}{r_2}=m_2g\cos\theta-T_2 \qquad \text{(半径方向)}$$

$$m_2r_2\ddot{\theta}=-m_2g\sin\theta+R_2 \qquad \text{(接線方向)}$$

棒の力のつりあい：

$$T_1+T_2-T_0=0 \qquad \text{(半径方向)}$$

$$R_1-R_2+R_0=0 \qquad \text{(接線方向)}$$

$$r_1R_1-r_2R_2=0 \qquad \text{(棒の支点回りの力のモーメント)}$$

未知量 ($T_1, R_1, T_2, R_2, T_0, R_0$ と θ) 7 個、関係式 7 個 $\longrightarrow$ 解ける

棒の支点回りの力のモーメント式の R_1, R_2 を消去して、

$$(m_1{r_1}^2 + m_2{r_2}^2)\ddot{\theta} + (m_1r_1 + m_2r_2)g\sin\theta = 0$$

$\theta << 1$ rad **のもとで，**

$$(m_1{r_1}^2 + m_2{r_2}^2)\ddot{\theta} + (m_1r_1 + m_2r_2)g\theta = 0$$

解$\theta = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$　　$\omega = \sqrt{\dfrac{(m_1r_1 + m_2r_2)g}{m_1{r_1}^2 + m_2{r_2}^2}}$

周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1{r_1}^2 + m_2{r_2}^2}{(m_1r_1 + m_2r_2)g}}$　　等価長さ $x = \dfrac{m_1{r_1}^2 + m_2{r_2}^2}{m_1r_1 + m_2r_2}$

未知量 $T_1, R_1, T_2, R_2, T_0, R_0$ も順次求まる。

C 案：**剛体の運動としての扱い**

支点 A 回りの回転運動の式 (角運動量変化 = 力のモーメント)

$$J_A\ddot{\theta} = -r_1 \times m_1 g\sin\theta - r_2 \times m_2 g\sin\theta$$

$$J_A = m_1{r_1}^2 + m_2{r_2}^2 \qquad \text{(慣性モーメント)}$$

合わせて

$$(m_1{r_1}^2 + m_2{r_2}^2)\ddot{\theta} + (m_1r_1 + m_2r_2)g\sin\theta = 0$$

$\theta << 1$ rad **として，** $\sin\theta \sim \theta$ **の近似により，**

$$(m_1{r_1}^2 + m_2{r_2}^2)\ddot{\theta} + (m_1r_1 + m_2r_2)g\theta = 0$$

以下、B 案に一致。

ただし、内力 T_1, R_1, T_2, R_2 **は求まらない。**

(補足) 剛体の運動方程式

一点に働く力のつり合い

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0$$

質点の運動方程式

$$\sum X = m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \sum Y = m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad \sum Z = m\frac{d^2z}{dt^2}$$

剛体 (質点系の一種) に働く力のつり合い

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0, \quad \sum(1\text{ 点回りの力のモーメント}) = 0$$

剛体の運動方程式 (重心を G とす)

$$\sum X = m\frac{d^2x_G}{dt^2}, \quad \sum Y = m\frac{d^2y_G}{dt^2}, \quad \sum Z = m\frac{d^2z_G}{dt^2}$$

$$\sum(\text{力のモーメント}) = (\text{慣性モーメント})\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

ただし、力のモーメント、慣性モーメントは重心または固定点回りに限る。

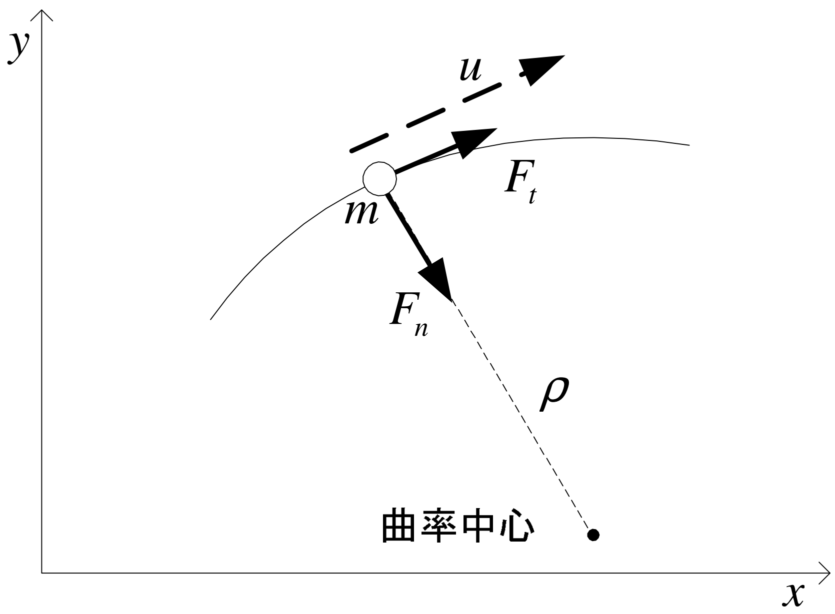
オイラーによる力学原理

18 世紀当時の力学問題の開放 $\longrightarrow$ 「数学者」ごとに独自の手法。

難解 (思いつかない)、応用が困難 $\longleftarrow$ 幾何学的な記述が原因

オイラーの考え：共通した原理があるはず。$\longrightarrow$ 運動方程式

幾何学的な記述 $\longrightarrow$ 解析的 (微積分を用いた現在の方法)。



基礎とすべき式：

力と運動が一致する場合の関係式:

$$mdu = Fdt$$

一般の曲線運動の関係式:

$$mdu = F_t dt \qquad \text{(接線方向)}$$

$$m\frac{u^2}{\rho} = F_n \qquad \text{(法線方向)}$$

オイラーによる力学の展開

力学の最終的応用

(1) 無限に小さくて点と見なすことのできる物体を調べる (質点の力学)。
(2) 有限の大きさを持ちその形を変えない剛体に着目する (剛体の力学)。
(3) 柔軟な物体を論ずる (変形？)。
(4) 伸縮可能なものに取りかかる (変形する物体の力学)。
(5) 互いに作用を及ぼし合っている複数個の物体を調べる (質点系の力学)。
(6) 流体の運動を調べる (流体の力学)。

これらに共通のすべての原理を包含する公式：3 次元の運動方程式

$$m\ d^2x = F_x\ dt^2, \qquad m\ d^2y = F_y\ dt^2, \qquad m\ d^2z = F_z\ dt^2$$

(1) 運動方程式を $du = d(dx/dt)$ 等の微分量で与える。
(2) 力，加速度は 3 次元ベクトル量、運動方程式はベクトルの方程式。
(3) 物体の構成要素であるすべての質点に対して、運動方程式が成立。

(参考):「力」の尺度問題

運動している物体は、ある「力」を持っている。

他の物体に当って壊す (動かす)。抵抗に打ち勝って進む、などの能力

「いきおい」、「慣性力」、$\cdots$

この「力」を何で測るべきか？　どの量が保存されるのか？

1644 年、デカルト『哲学原理』：

物質の本質は形、大きさと運動であり、世界の運動の量 (質量と速さの積) は不変。

1686 年、ライプニッツ『- - - デカルト及びその他の人々の重大な誤り』：

物体の力は mv でなく「活力」 mv^2 により決められ，保存されるのは全「活力」

デカルト主義 (mu 説) $\longleftrightarrow$ ライプニッツ主義 (mu^2 説)

17〜18 世紀にかけて、イギリス、ヨーロッパ全域の科学者の間で一大論争が続く。

(参考):「力」の尺度問題 (オイラーの結論)

運動方程式は

$$F = m\frac{du}{dt}$$

時間 dt で積分すると

$$F\Delta t = m\int \frac{du}{dt}dt = m(u_2 - u_1)$$

距離 $dx = udt$ で積分すると

$$F\Delta x = m\int u\frac{du}{dt}dt = \frac{1}{2}m\left({u_2}^2 - {u_1}^2\right)$$

両者の差異は、同一の時間で比較するか、距離で比較するかの違い。
運動する物体に何らかの固有の「力」を当てはめようとすることが誤り。

$\longrightarrow$ 運動方程式を基礎とすべき。

3　解析力学の成立

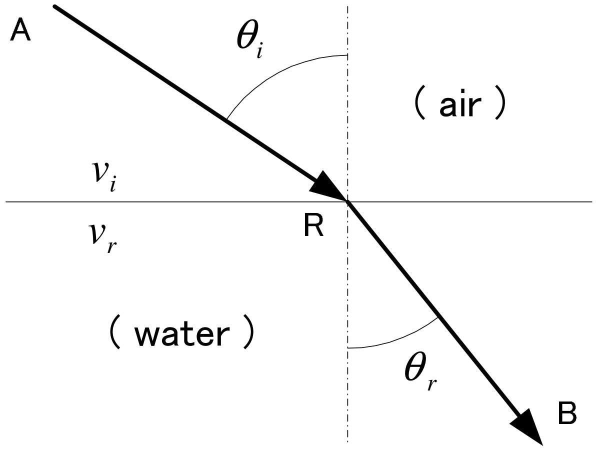
ピエール＝ルイ・モロー・ド・モーペルテュイ

(Pierre-Louis Moreau de Maupertuis，1698-1759)

フランスの豊かな商家出身者。
騎兵隊での軍務の傍ら数学者の名声も得て、
科学アカデミー会員ともなった。
1728 年にはイギリス王立協会会員にもなり，
フランスでのニュートン理論普及にも貢献。
地球形状論争を決着するための子午線弧長調
査のうち、ラップランド観測隊を指揮した。
パリ科学アカデミー、プロシア科学アカデ
ミーなどの会長を歴任した。

「最小作用の原理」の提唱者であり、
ダーウィンに先駆けて生物進化説も提唱。

光の屈折現象をめぐる論争



17 世紀はじめには、光の屈折について
スネルの法則が成り立つことが知られていた。

$$\sin\theta_i / \sin\theta_r = \text{const.} \quad (> 1)$$

この原因を説明する**二つの説**が論争。
光の速度が問題：
(入射側媒体内 v_i，屈折側媒体内 v_r)

デカルト は，光が境界面を通過する際に、境界面に平行な速度成分は変わらず、**垂直な成分**だけが変わるとして $\longrightarrow \sin\theta_i / \sin\theta_r = v_r / v_i$

ニュートンも光の粒子説に基き、この主張を支持した (**モーペルテュイ**も)。

フェルマーは、フェルマーの原理 (光は**所要時間が最短となる経路**を進む) を提唱

$$\longrightarrow \sin\theta_i / \sin\theta_r = v_i / v_r$$

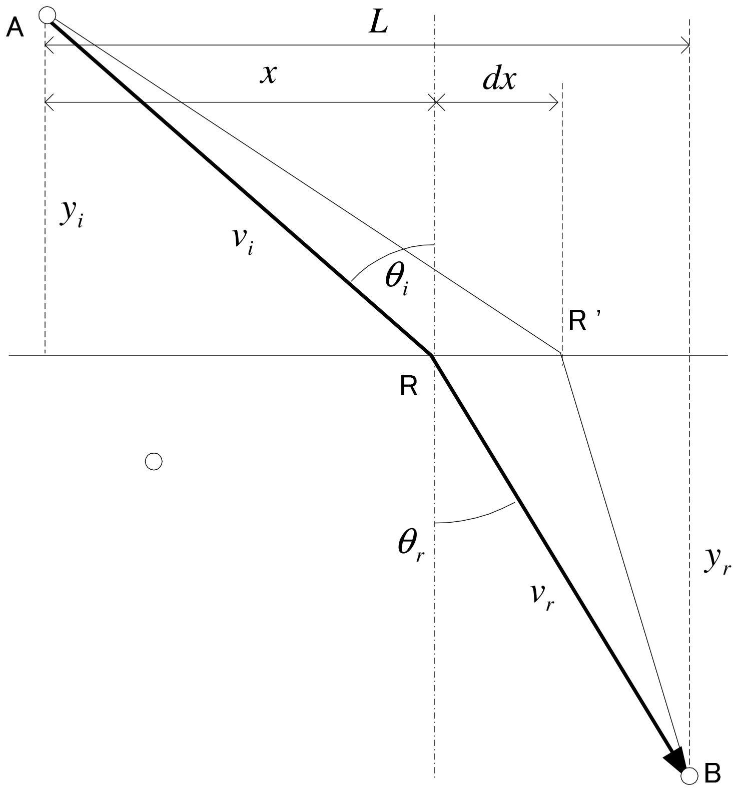
ホイヘンスもホイヘンスの原理 (**素元波の包絡面**が新たな波面を形成) を主張し、フェルマーの主張を支持。

モーペルテュイによる最小作用の原理

「自然はその効果を生みだす際に，常にもっとも単純な仕方で行う」(信念?)

光学の法則と力学の法則をまとめる一つの原理：

作用 $I=(\text{質量})\times(\text{速さ})\times(\text{距離})$ **が最小となる (最小作用の原理)**



各媒体内の光速を v_i, v_r とする。

光が斜めに ARB のように進むとき

$$I = v_i\overline{AR} + v_r\overline{RB}$$
$$= v_i\sqrt{x^2+y_i^2} + v_r\sqrt{(L-x)^2+y_r^2}$$

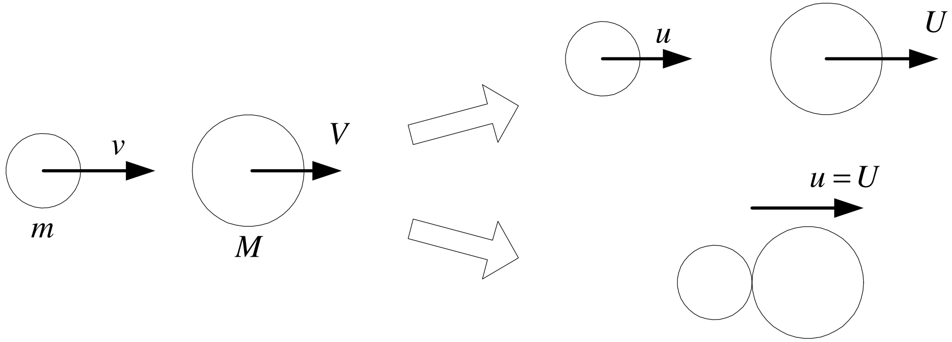
R が R' へ dx ずれた時の I の増加量

$$dI = v_i d(\overline{AR}) + v_r d(\overline{RB})$$
$$= v_i \frac{1}{2}\frac{2x\,dx}{\sqrt{x^2+y_i^2}} + v_r\frac{1}{2}\frac{2(L-x)(-dx)}{\sqrt{(L-x)^2+y_r^2}}$$
$$= (v_i \sin\theta_i - v_r\sin\theta_r)\,dx$$

I が最小となる条件より、

$$\sin\theta_i/\sin\theta_r = v_r/v_i = \text{const.}$$

２物体の 衝突問題



質量 m, M の 2 物体が衝突し，速度が $v \to u$，$V \to U$ に変化

反発係数 e のとき、
$U - u = e(v - V)$

単位時間を考え、(距離) は (速さ) に、(速さ) は (速度差) に置き換えて、

$$I = (\text{質量}) \times (\text{速さ}) \times (\text{距離}) = m(u-v)^2 + M(U-V)^2$$

反発係数一定 $(dU - du = 0)$ のもとで、u, U 変化に対し I が最小となる条件は

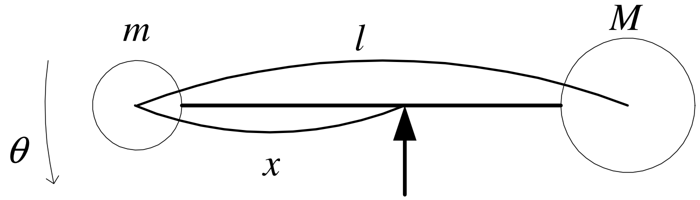
$$dI = 2m(u-v)du + 2M(U-V)dU = 2\{m(u-v) - M(U-V)\}du = 0$$

つまり

$$mu + MU = mv + MV \qquad \text{(運動量保存則)}$$

$\longrightarrow$ 衝突問題は、最小作用の原理から導かれる。

2質量の重心を求める問題



質量 m, M の 2 個の重りの重心 x を求める。

重心位置を支点とし，θ だけ回転したとすると，作用は

$$I = (\text{質量}) \times (\text{速さ}) \times (\text{距離})$$
$$= mx\dot{\theta}x\theta + M(l-x)\dot{\theta}(l-x)\theta = \{mx^2 + M(l-x)^2\}\theta\dot{\theta}$$

x の変化に対して I が極小となる条件より、

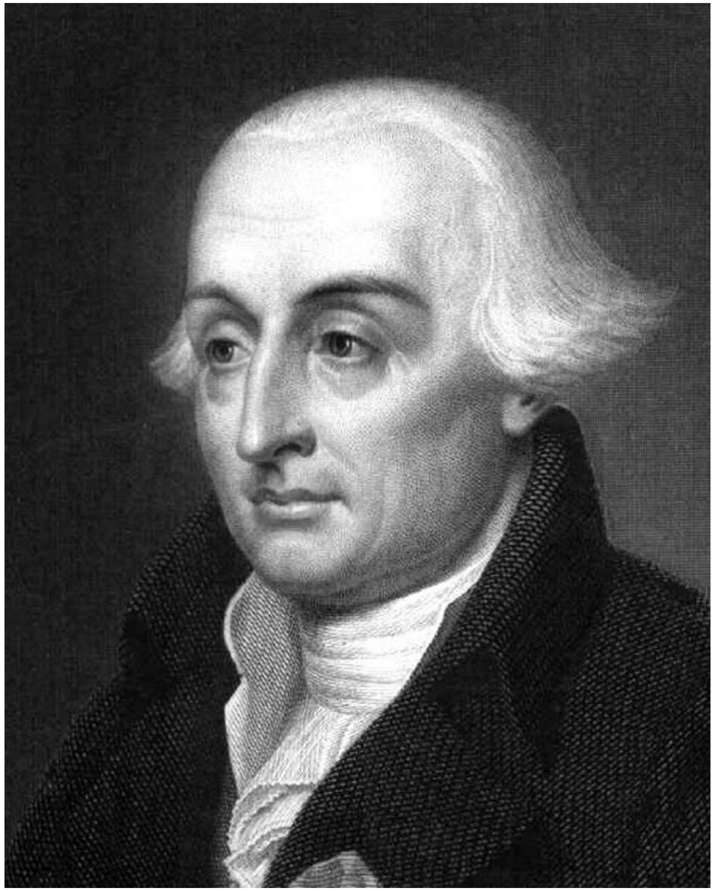
$$dI = 2\{mx - M(l-x)\}\theta\dot{\theta}\ dx = 0$$

つまり　　$x = \frac{M}{m+M}l$ [*1]。

「最小作用の原理」は，光学，動力学，静力学に共通した原理である。

[*1] ここで行ったことは，静力学における仮想仕事 (古くは仮想速度) の原理と同じ。

ジョゼフ=ルイ・ラグランジュ (Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813)



トリノ生まれのフランス系イタリア人。トリノ大学で自然学と数学の道を志し、変分法の基本的アイディアを確立した。トリノ王立砲兵学校、ベルリン・アカデミーを経て、1785 年からフランスへ移った。革命後は、度量衡委員会、経度委員会等のメンバーとなり、エコール・ポリテクニークの初代校長も勤めた。月や惑星の運動，音 (振動)，流体力学などに理論的貢献をした。オイラーとも深く交流を持ち、力学を一般化して解析力学を確立し，主著『解析力学』にまとめた。

オイラーと並び、18 世紀最大の数学者、物理学者とされる。

解析力学への流れ

1. オイラー

ニュートン力学を確立

基礎：運動方程式 $\rightarrow$ 応用：天体力学 (質点)、剛体、弾性体・流体、etc.

2. モーペルテュイ $I = mus$

「最小作用の原理」を提唱 (ただし独断と誤り多し)。

オイラーによる評価：$I = \int mu\ ds$ と解釈

(1) 第 2 の方法の可能性あり。

(2)「作用の量」を見出す困難。

(3) 可否には第 1 の方法が必要。

3. ラグランジュ．←オイラーの考えを継承

力学を解析 (代数) 化。変分法の基礎確立。仮想仕事の原理。最小作用の原理。

力学を体系化：静力学から動力学へ。ラグランジュの運動方程式。未定乗数法。

解析力学へ。

仮想仕事の原理 (静力学における変分原理)

質点系に力が作用してつり合っているとき，可能な任意の仮想変位に際して内力および外力のする仮想仕事の総和はゼロとなる (仮想仕事の原理)。

$\boldsymbol{F}_i$: 各質点に働く力、$\delta\boldsymbol{r}_i$: 仮想変位、$\delta^* W$: 仮想仕事。

$$\delta^* W = \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0$$

補足

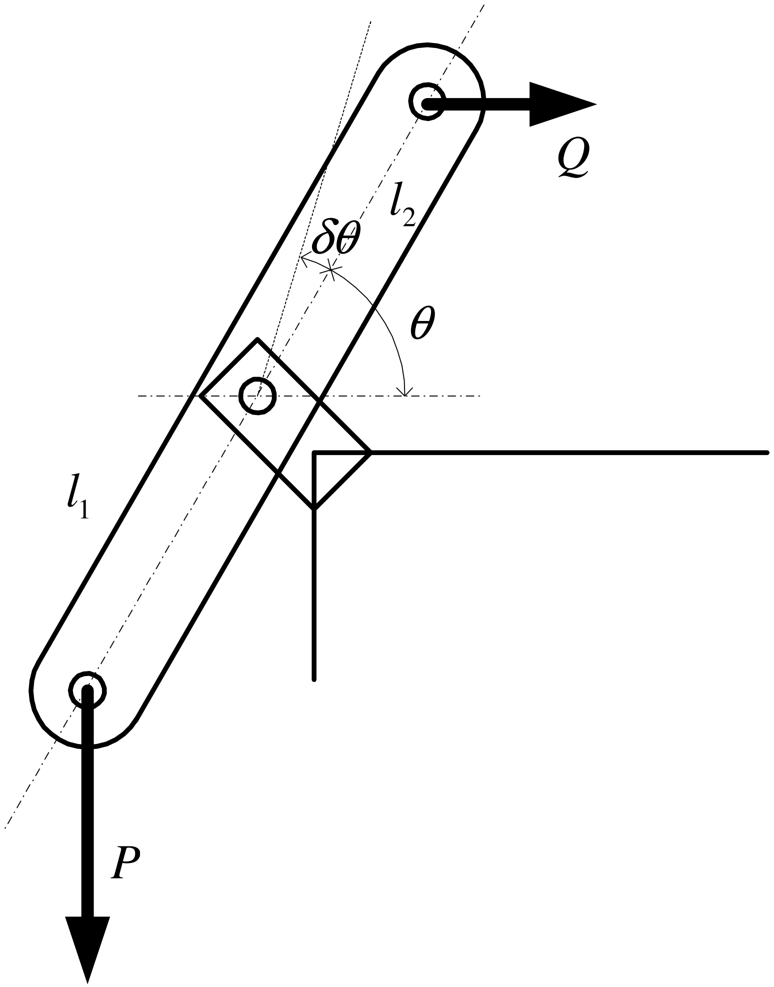
(1) 変位を伴わない力 (普通の拘束力等) は仕事をしないので、考える必要ない。

(2) 剛体では変形が生じないので，内力による仮想仕事はゼロである。

(3) 弾性体 (やバネ) では、外力の仮想仕事は、内力によるひずみエネルギー増加量に等しい。

(4) 力がすべて保存力の場合、全ポテンシャルエネルギーが極小値となる。

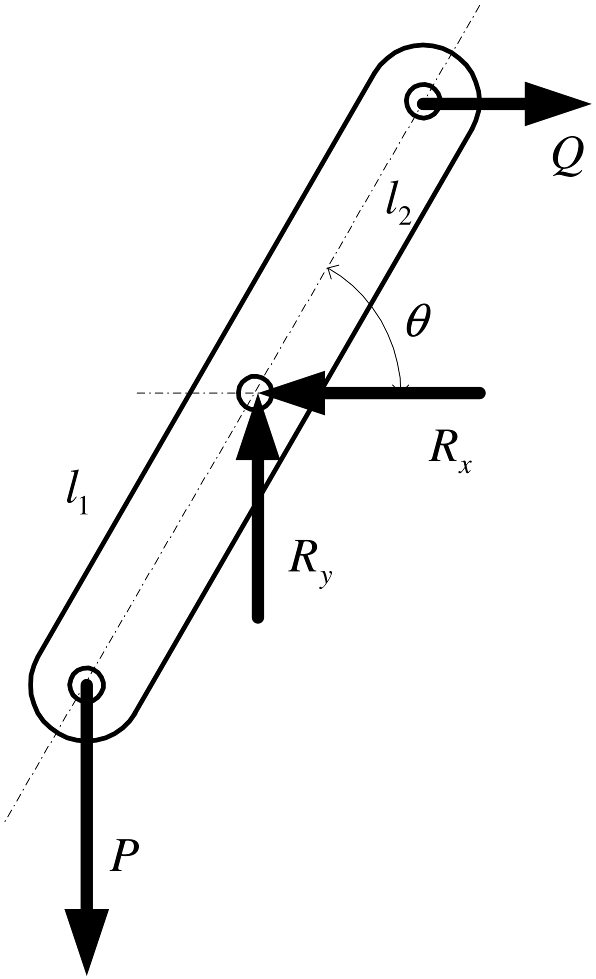
(例 1) てこのつりあい



てこの支点をヒンジで支え、左端を鉛直下方へ P の力で引き、右端を水平右方へ Q の力でで引く。
てこの質量や支点の摩擦は無視できるものとする。

問題：静止する時の傾斜角 θ を求めよ。

A 案 (オイラー法)=山内方式



step1: **対象 (てこと重り) を取り出す。**

step2: **対象に働く力を描く。**

支点に働く力を R_x, R_y **とする。**

step3: **力のつりあいは**

$$\text{水平}: Q - R_x = 0$$

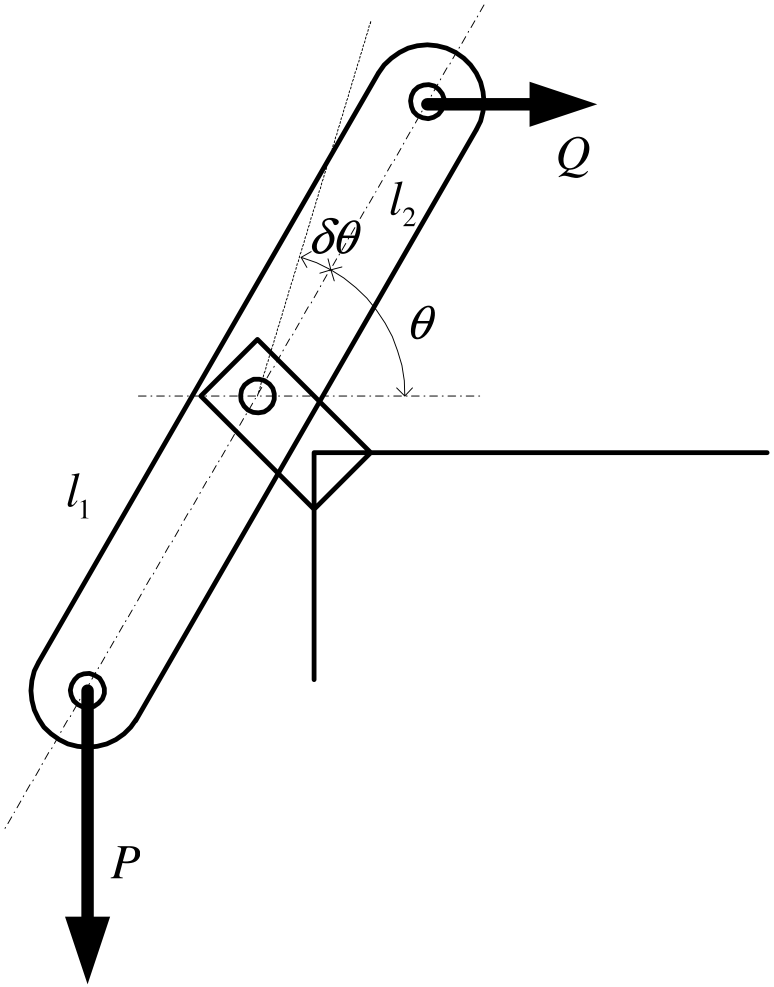
$$\text{鉛直}: R_y - P = 0$$

$$\text{回転}: Pl_1 \cos\theta - Ql_2 \sin\theta = 0$$

第 3 式より $\tan\theta = \frac{Pl_1}{Ql_2}$

第 1、2 式より $R_x = Q, \quad R_y = P$

B 案 (仮想仕事の原理)



θ の仮想変位 $\delta\theta$ に際して

P による仮想仕事は　　$Pl_1 \delta\theta \cos\theta$

Q による仮想仕事は　　$-Ql_2 \delta\theta \sin\theta$

仮想仕事の原理より

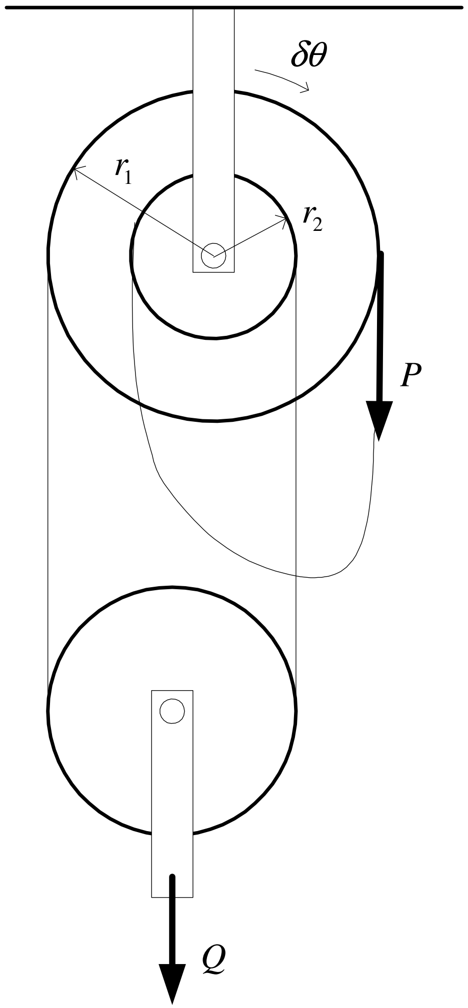
$$\begin{aligned} \delta^* W &= Pl_1 \delta\theta \cos\theta - Ql_2 \delta\theta \sin\theta \\ &= (Pl_1 \cos\theta - Ql_2 \sin\theta)\delta\theta = 0 \end{aligned}$$

任意の $\delta\theta$ について成り立つには

$$\tan\theta = \frac{Pl_1}{Ql_2}$$

とならねばならぬ。

(例 2) 差動滑車

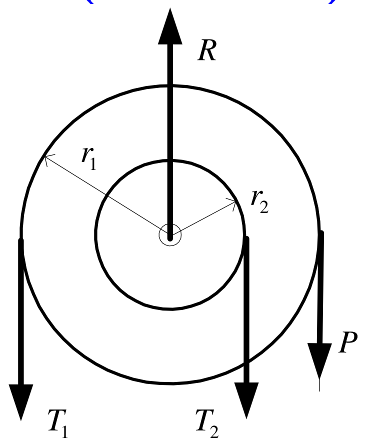


問題：

図に示す差動滑車（チェンブロック）を用いて、Q を持ち上げるのに要する力 P を求めよ。

ただし、チェン、滑車の重さは考えなくてよい。

A 案 (オイラー法)



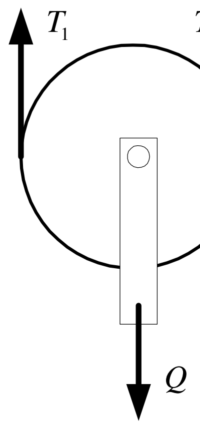
step1: **対象を取り出す。**

静滑車と動滑車を、それぞれ取り出す。

step2: **対象に働く力を描く。**

チェンの張力を T **、静滑車支持力を** R **とする。**

step3: **力のつりあいは**



$$\text{静滑車鉛直：}\quad R - T_1 - T_2 - P = 0$$

$$\text{静滑車回転：}\quad Pr_1 + T_2 r_2 - T_1 r_1 = 0$$

$$\text{動滑車鉛直：}\quad T_1 + T_2 - Q = 0$$

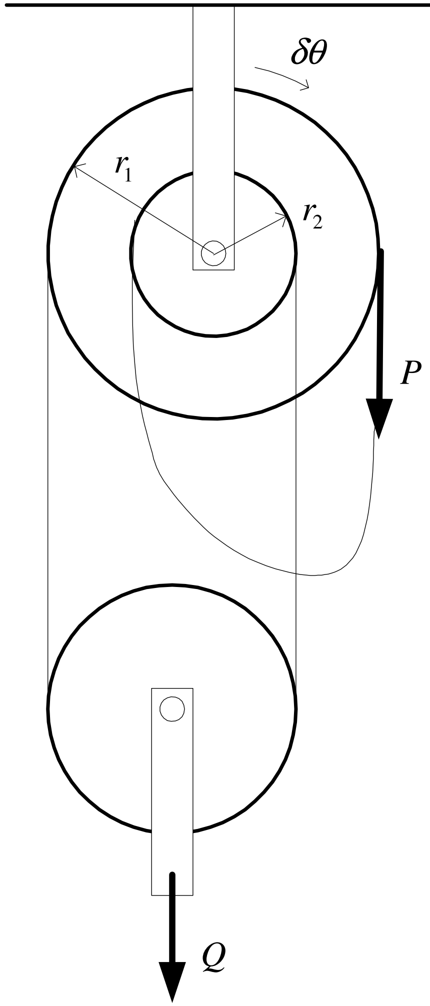
$$\text{動滑車回転：}\quad T_1 r - T_2 r = 0$$

第 4, 3 **式より** $\quad T_1 = T_2 = Q/2$

第 2 **式より** $\quad P = T_1 - T_2 \frac{r_2}{r_1} = \frac{Q}{2}\left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right)$

第 1 **式より** $\quad R = P + T_1 + T_2 = \frac{Q}{2}\left(3 - \frac{r_2}{r_1}\right)$

B 案 (仮想仕事の原理)



静滑車の微小な仮想回転 $\delta\theta$ に際して，
力 P, Q が行う仮想仕事は

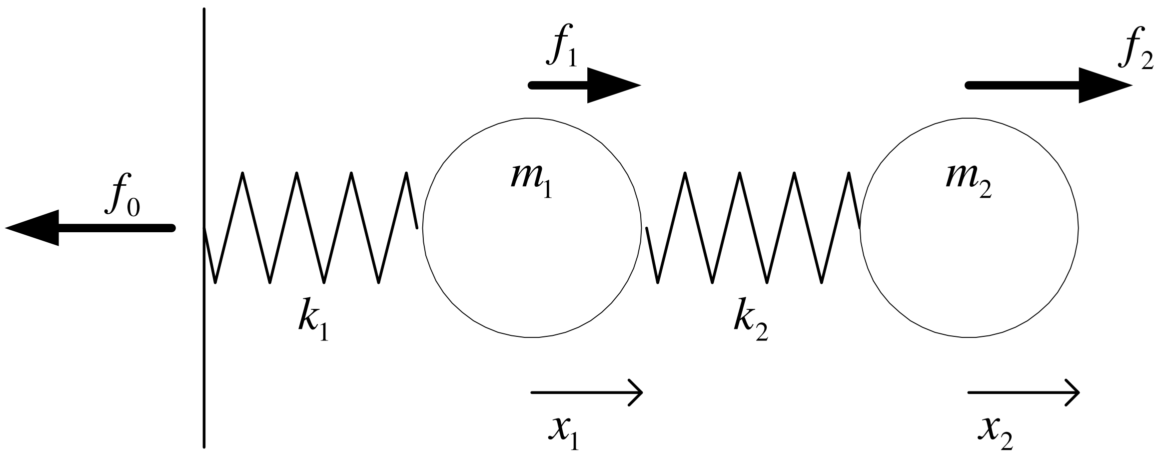
$$\delta^* W = P r_1 \delta\theta - Q \frac{r_1 - r_2}{2} \delta\theta = \left(P r_1 - Q \frac{r_1 - r_2}{2} \right) \delta\theta$$

P, Q **以外の力は，仕事をしないので考えなくてよい。**
つりあう条件は，任意の $\delta\theta$ に際して $\delta^* W = 0$ となることから，

$$P = \frac{Q}{2} \left(1 - \frac{r_2}{r_1} \right)$$

となる。

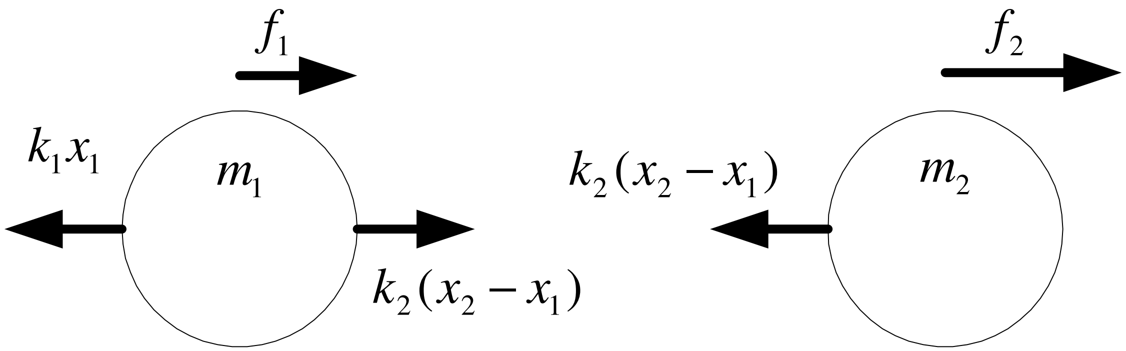
（例３）２個のコイルばねと重り



問題：

図のように２個のコイルばねを介して２個の重りが壁に取り付けられている。それぞれの重りに水平に外力 f_1 、f_2 が作用したとき、各重りの変位 x_1 ，x_2 を求めよ。ただし、重力は考えなくて良い。

A 案 (オイラー法)



step1: **対象を取り出す。**

step2: **対象に働く力を描く。** (バネ張力) = (ばね定数) × (伸び)

step3: **力のつりあい (水平方向のみ)**

重り 1: $-k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) + f_1 = 0$

重り 2: $-k_2(x_2 - x_1) + f_2 = 0$

これより、

$$x_1 = \frac{f_1 + f_2}{k_1}, \quad x_2 = \frac{f_1 + f_2}{k_1} + \frac{f_2}{k_2}$$

B 案 (仮想仕事の原理)

$x_1,\ x_2$ の仮想変位 $\delta x_1,\ \delta x_2$ に際して，

外力 $f_1 f_2$ による仮想仕事

$$\delta^* W^{(ex)} = f_1 \delta x_1 + f_2 \delta x_2$$

内力によるばねのポテンシャルエネルギー

$$U^{(in)} = \frac{1}{2} k_1 {x_1}^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2$$

より $\qquad \delta U^{(in)} = k_1 x_1 \delta x_1 + k_2 (x_2 - x_1)(\delta x_2 - \delta x_1)$

仮想仕事の原理 $\delta^* W = -\delta U^{(in)} + \delta^* W^{(ex)} = 0$ より

$$-k_1 x_1 \delta x_1 - k_2 (x_2 - x_1)(\delta x_2 - \delta x_1) + f_1 \delta x_1 + f_2 \delta x_2$$

$$= \{-k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) + f_1\} \delta x_1 + \{-k_2 (x_2 - x_1) + f_2\} \delta x_2 = 0$$

任意の $\delta x_1,\ \delta x_2$ に対して成立するためには

$$-k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) + f_1 = 0$$

$$-k_2 (x_2 - x_1) + f_2 = 0$$

これより，

$$x_1 = \frac{f_1 + f_2}{k_1}, \qquad x_2 = \frac{f_1 + f_2}{k_1} + \frac{f_2}{k_2}$$

Lagrange の運動方程式 (仮想仕事の原理の動力学への適用)

力学系の運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー U を
一般化座標 $(q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n)$ とその時間微分および時間 t を用いて

$$T = T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n, q_1, q_2, \cdots, q_n, t)$$
$$U = U(q_1, q_2, \cdots, q_n)$$

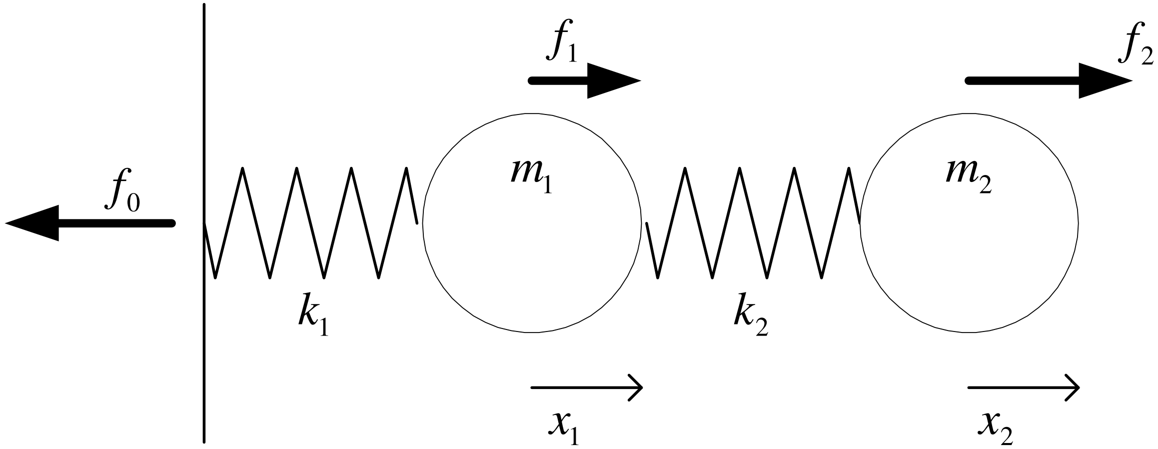
と表す時、運動方程式は次式で表される。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q'_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

ただし、Q'_i は保存力以外の一般化力 (仕事をしない力は含まれない)。

一般化座標	一般化力	一般化運動量	仕事
q_i	Q'_i	$\partial T/\partial \dot{q}_i$	$Q'_i \delta q_i$
曲線に沿う長さ	接線力	運動量	仕事
軸回り回転角度	力のモーメント	角運動量	

（例１）2 自由度系振動

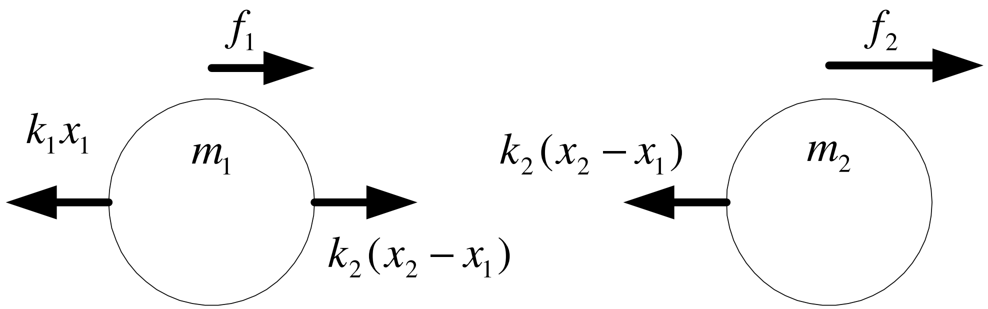


問題：

図のように 2 個のコイルばねを介して 2 個の重りが壁に取り付けられ、それぞれの重りに水平に外力 $f_1 = f_1(t)$ 、$f_2 = f_2(t)$ が作用するものとする。

各重りの運動を求めよ。ただし、重力は考えなくて良い。

A 案 (オイラー法)



step1: **対象を取り出す (上図)。**

step2: **対象に働く力を描く (上図)。**

step3: **運動方程式 (水平方向のみ)**

重り 1: $-k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) + f_1 = m_1\ddot{x}_1$

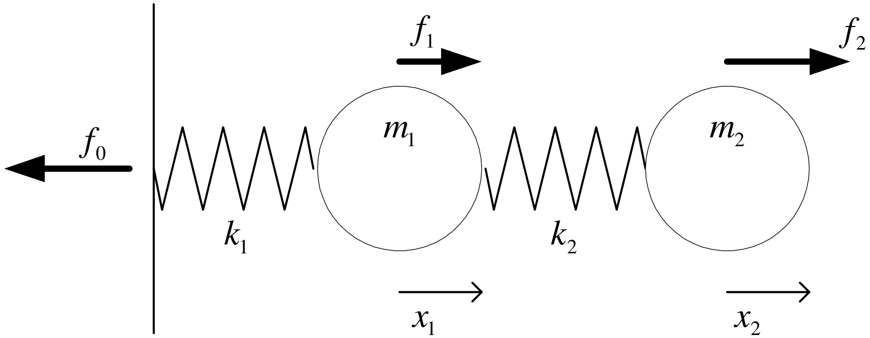
重り 2: $-k_2(x_2 - x_1) + f_2 = m_2\ddot{x}_2$

整理して

$$\begin{array}{ccccccc} m_1\ddot{x}_1 & + & (k_1+k_2)x_1 & - & k_2x_2 & = & f_1(t) \\ m_2\ddot{x}_2 & - & k_2x_1 & + & k_2x_2 & = & f_2(t) \end{array}$$

(以下省略)

B 案 (ラグランジュの運動方程式)



x_1 と x_2 を座標に選ぶ。

運動エネルギー

$$T = \tfrac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

ポテンシャルエネルギーは

$$U = \tfrac{1}{2}k_1x_1^2 + \tfrac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2$$

ラグランジュの運動方程式に用いて

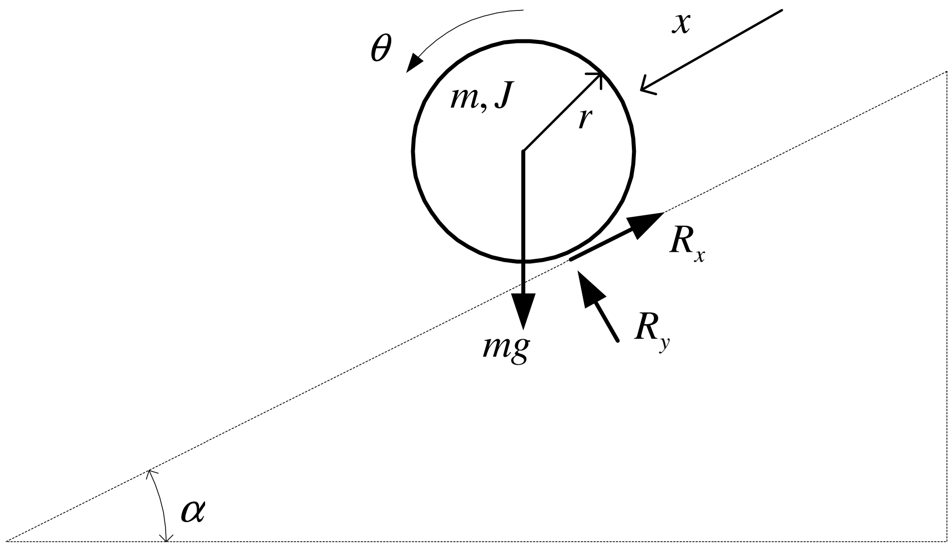
$$\tfrac{d}{dt}(m_1\dot{x}_1) - 0 + k_1x_1 - k_2(x_2 - x_1) = f_1$$
$$\tfrac{d}{dt}(m_2\dot{x}_2) - 0 + k_2(x_2 - x_1) = f_2$$

整理して

$$\begin{array}{ccccccc} m_1\ddot{x}_1 & + & (k_1+k_2)x_1 & - & k_2x_2 & = & f_1(t) \\ m_2\ddot{x}_2 & - & k_2x_1 & + & k_2x_2 & = & f_2(t) \end{array}$$

(以下省略)

（例２）斜面を転がる円筒



問題：

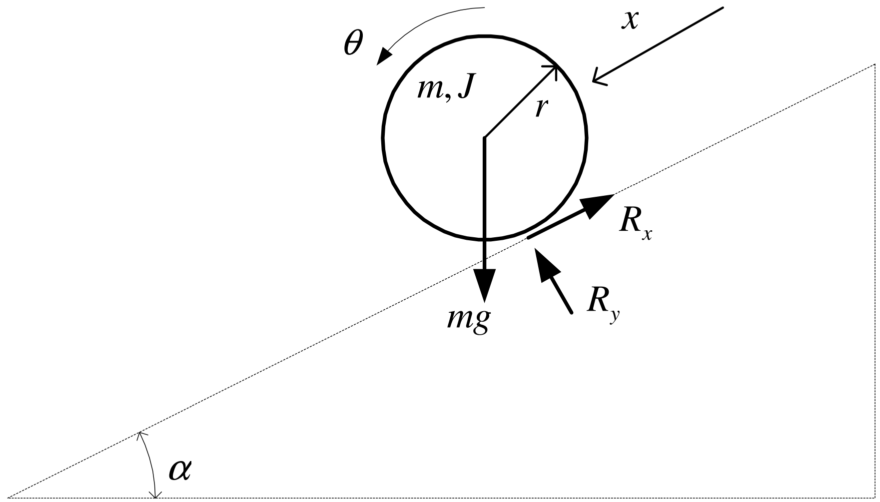
傾斜 α の斜面上を転がり落ちる半径 r の円筒の運動を求めよ。ただし、円筒の質量を m、重心回り慣性モーメントを J とする。

斜面に沿って x 軸をとり、円筒回転角度を θ とする。
円筒が滑らずに転がることより、円筒重心位置は

$$x = r\theta, \qquad y = \text{const.}$$

となる (拘束条件)。

A 案 (オイラー法)



step1: **対象を取り出す。**

図の円筒部分

step2: **対象に働く力を描く。**

斜面が円筒に及ぼす力:

R_x R_y **(左図)**

step3: **運動方程式**

x **方向**: $mg\sin\alpha - R_x = m\ddot{x}$,　　y **方向**: $-mg\cos\alpha + R_y = m\ddot{y} = 0$

回転 : $rR_x = J\ddot{\theta} = J\frac{\ddot{x}}{r}$

第 1、3 **式より** R_x **を消去して**

$$\left(m + \frac{J}{r^2}\right)\ddot{x} - mg\sin\alpha = 0$$

必要なら、第 2 **式から** $R_y = mg\cos\alpha$ 　　**(以下省略)**

Ｂ 案 (ラグランジュの運動方程式)

円筒の運動エネルギーおよびポテンシャルエネルギー

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{J}{r^2}\right)\dot{x}^2$$

$$U = -mgx\sin\alpha$$

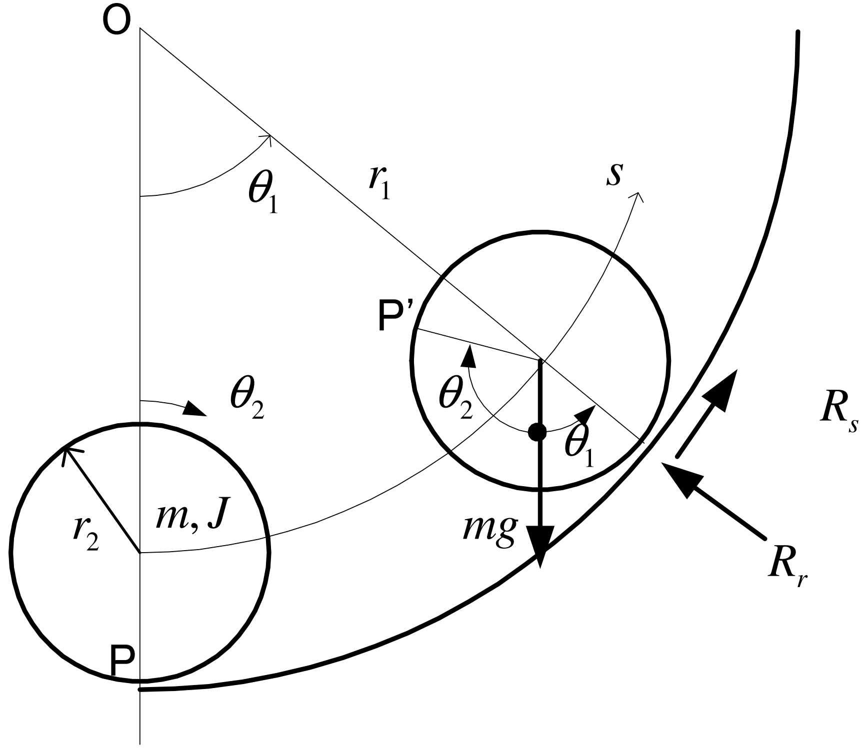
ラグランジュの運動方程式に用いて $\frac{d}{dt}\left[\left(m + \frac{J}{r^2}\right)\ddot{x}\right] - 0 - mg\sin\alpha = 0$

整理して

$$\left(m + \frac{J}{r^2}\right)\ddot{x} - mg\sin\alpha = 0$$

(以下省略)

（例３）球内面を転がる小球



半径 r_1 の中空球内面を
半径 r_2 の小球が転がる。
小球質量 m、慣性モーメント J
中空球中心を通る鉛直面内限定。

θ_1：小球の重心位置

θ_2：小球の回転角

小球が中空球内面を転がった距離と θ_1、θ_2 の関係 (拘束条件)

$$r_1\theta_1 = r_2(\theta_2 + \theta_1)$$

小球重心の移動距離 s

$$(r_1 - r_2)\theta_1 = r_2\theta_2 = s$$

問題：小球の運動を求めよ。

A 案 (オイラーの方法)

中空球内面が小球に及ぼす力を、図のように R_r, R_s とすと、**運動方程式**は

$$
\begin{aligned}
s\ \text{方向} : m(r_1 - r_2)\ddot{\theta}_1 &= -mg\sin\theta_1 + R_s \\
r\ \text{方向} : -m(r_1 - r_2)\dot{\theta}_1^2 &= mg\cos\theta_1 - R_r \\
\text{回転} : J\ddot{\theta}_2 &= -r_2 R_s
\end{aligned}
$$

第 1、3 式より R_s を消去し、$\theta_2 = \frac{r_1 - r_2}{r_2}\theta_1$ を用いて、

$$
J\frac{r_1 - r_2}{r_2}\ddot{\theta}_1 = -r_2\left[m(r_1 - r_2)\ddot{\theta} + mg\sin\theta_1\right]
$$

整理して

$$
\left(m + \frac{J}{{r_2}^2}\right)(r_1 - r_2)\ddot{\theta}_1 + mg\sin\theta_1 = 0
$$

$\theta_1(t)$ が求まれば、第 2、3 式より R_r、R_s が求まる。

(以下省略)

B 案 (ラグランジュの運動方程式)

運動エネルギー、重力ポテンシャルエネルギーは

$$T = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}_2^2, \qquad U = -mg(r_1 - r_2)\cos\theta_1$$

T を θ_1 で表すと

$$T = \frac{1}{2}\left(m + \frac{J}{r_2^2}\right)(r_1 - r_2)^2\dot{\theta}_1^2$$

これより、ラグランジュの運動方程式は

$$\left(m + \frac{J}{{r_2}^2}\right)(r_1 - r_2)^2\ddot{\theta}_1 + mg(r_1 - r_2)\sin\theta_1 = 0$$

整理して

$$\left(m + \frac{J}{{r_2}^2}\right)(r_1 - r_2)\ddot{\theta}_1 + mg\sin\theta_1 = 0$$

(以下省略)

4 まとめ

(1) 力学が現在の形になるには、幾何学ではなく解析学 (微積分学) が必要であった。その端緒はライプニッツであり、その影響を受けたヨーロッパ大陸の数学者・物理学者により達成されたようだ。とりわけ、バーゼルのベルヌーイ一族とオイラーの貢献が大きい。

(2) オイラーによると、力学の基礎は運動方程式であり、質点、剛体、質点系、弾性体、流体など、すべての力学に共通の考え方である。このことを肝に銘じて力学を学ぶことを薦める。

(3) 仮想仕事の原理、最小作用の法則 (ラグランジュの運動方程式) は、力学のもう一つの方法となっている。複雑な問題では、こちらの方が簡単になることが多い (ただし、落とし穴がいくつかあるので、原理はともかく、使用法に習熟しておくこと)。