Lagrange の運動方程式

S. Yamauchi

2017 年 7 月 22 日

目次

1　Lagrange の運動方程式

　ある力学系の配置 (位置) を表すのに n 個の座標 $(q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n)$ が必要である時、n は系の自由度と呼ばれる。1 個の質点の自由度は 3 であり、距離が一定に保持された 2 質点の自由度は 5 である。1 個の剛体の自由度は 6 (例えば、重心の座標が 3、重心を通る軸回りの回転角が 3) である。このような座標 q_i を**一般化座標**という。運動エネルギーを一般化座標とその時間微分および時間 t を用いて

$$T = T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n, q_1, q_2, \cdots, q_n, t) \tag{1}$$

と表す時、運動方程式は次式で表される。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{2}$$

式 (2) を **Lagrange の運動方程式**という [1][2]。

　Q_i は、物体に働く力の q_i 方向成分と考えられるが、力の成分そのものではなく、Q_i と一般化座標の増分 dq_i との積 $Q_i dq_i$ が仕事 dW となるような物理量であり、**一般化力**と呼ばれる。

$$dW = \sum_{i=1}^{n} Q_i dq_i$$

例えば、dq_i がある曲線に沿う長さの場合には、Q_i は接線方向の力であり、dq_i がある軸回りの回転角である場合には、Q_i はその軸回りの力のモーメントである。Q_i を求めるには、一般化座標の変化に対して仕事をしない外力 (拘束力、等) をあらかじめ除いておくことが大切である。

　Q_i (またはその一部) が保存力である場合は、ポテンシャルエネルギー $U(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ が存在して、

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{3}$$

と表すことができる。この場合は次式で表される。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q'_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{4}$$

ただし、Q'_i は保存力以外の一般化力である。粘性等による摩擦力もこの中に含めればよい (§4 の散逸関数を用いる方法もある)。

2　Lagrange 運動方程式の誘導 (その 1：座標変換による誘導)

Lagrange の運動方程式は，通常次節のように Hamilton の原理をもとに説明されている。しかし，この節で示すように，Newton の運動方程式を座標変換することにより，Lagrange の運動方程式を導くこともできる ([3])。

2.1　一般化座標を用いた Newton の運動方程式の表示

N 個の質点系に対する Newton の運動方程式を次式で表す。

$$m_j \ddot{x}_j = X_j \tag{5}$$
$$m_j \ddot{y}_j = Y_j \tag{6}$$
$$m_j \ddot{z}_j = Z_j \tag{7}$$

ただし，$j = 1, 2, \cdots, N$ である。これらの質点の間に付加される拘束条件の数を f 個とすると，系の自由度は $n = 3N - f$ であり，質点系の座標 $(x_j, y_j, z_j), (j = 1, 2, \cdots, N)$ を n 個の一般化座標 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ で表すことができる。

$$x_j = x_j(q_1, q_2, \cdots, q_n) \tag{8}$$
$$y_j = y_j(q_1, q_2, \cdots, q_n) \tag{9}$$
$$z_j = z_j(q_1, q_2, \cdots, q_n) \tag{10}$$

これより，速度は次式で表される。

$$\dot{x}_j = \sum_k \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \dot{q}_k \tag{11}$$
$$\dot{y}_j = \sum_k \frac{\partial y_j}{\partial q_k} \dot{q}_k \tag{12}$$
$$\dot{z}_j = \sum_k \frac{\partial z_j}{\partial q_k} \dot{q}_k \tag{13}$$

ここで，$\sum_k$ は，全自由度 $k = 1 \sim n$ についての総和を取ることを示す。

さらに加速度は次式で表される。

$$\ddot{x}_j = \sum_k \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_k} \ddot{q}_k + \sum_l \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l \right) \tag{14}$$
$$\ddot{y}_j = \sum_k \left(\frac{\partial y_j}{\partial q_k} \ddot{q}_k + \sum_l \frac{\partial^2 y_j}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l \right) \tag{15}$$
$$\ddot{z}_j = \sum_k \left(\frac{\partial z_j}{\partial q_k} \ddot{q}_k + \sum_l \frac{\partial^2 z_j}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l \right) \tag{16}$$

これを Newton の運動方程式に用いると，次式となる。

$$m_j \sum_k \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_k} \ddot{q}_k + \sum_l \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l \right) = X_j \tag{17}$$

$$m_j \sum_k \left(\frac{\partial y_j}{\partial q_k} \ddot{q}_k + \sum_l \frac{\partial^2 y_j}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l \right) = Y_j \tag{18}$$

$$m_j \sum_k \left(\frac{\partial z_j}{\partial q_k} \ddot{q}_k + \sum_l \frac{\partial^2 z_j}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l \right) = Z_j \tag{19}$$

これは，各質点の x, y, z 方向の運動方程式を，一般化座標で与えたものである。

これにそれぞれ $\frac{\partial x_j}{\partial q_i}$，$\frac{\partial y_j}{\partial q_i}$，$\frac{\partial z_j}{\partial q_i}$ を乗じて加え合わせ，さらに全ての質点 j について加え合わせることにより，一般化座標 q_i に対応する運動方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
\sum_j m_j \Bigg[\sum_k \bigg(& \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \ddot{q}_k + \sum_l \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_k \partial q_l} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \dot{q}_k \dot{q}_l \\
& + \frac{\partial y_j}{\partial q_k} \frac{\partial y_j}{\partial q_i} \ddot{q}_k + \sum_l \frac{\partial^2 y_j}{\partial q_k \partial q_l} \frac{\partial y_j}{\partial q_i} \dot{q}_k \dot{q}_l \\
& + \frac{\partial z_j}{\partial q_k} \frac{\partial z_j}{\partial q_i} \ddot{q}_k + \sum_l \frac{\partial^2 z_j}{\partial q_k \partial q_l} \frac{\partial z_j}{\partial q_i} \dot{q}_k \dot{q}_l \bigg) \Bigg] = Q_i
\end{aligned} \tag{20}$$

ただし

$$Q_i = \sum_j \left(X_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + Y_j \frac{\partial y_j}{\partial q_i} + Z_j \frac{\partial z_j}{\partial q_i} \right) \tag{21}$$

は一般化座標 q_i に対応する一般化力である。

2.2 運動エネルギーを用いた運動方程式の表示

一方，質点系の運動エネルギーは次式で与えられる。

$$T = \frac{1}{2} \sum_j m_j \left(\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 + \dot{z}_j^2 \right) \tag{22}$$

これに式 (11)〜(13) を用いて一般化座標 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ および一般化速度 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n$ で表す。

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \sum_j m_j \left[\left(\sum_k \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)^2 + \left(\sum_k \frac{\partial y_j}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)^2 + \left(\sum_k \frac{\partial z_j}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_j m_j \left[\sum_k \sum_l \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_k} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} + \frac{\partial y_j}{\partial q_k} \frac{\partial y_j}{\partial q_l} + \frac{\partial z_j}{\partial q_k} \frac{\partial z_j}{\partial q_l} \right) \dot{q}_k \dot{q}_l \right]
\end{aligned} \tag{23}$$

これを q_i で微分して

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_j m_j \left[\sum_k \sum_l \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_k} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_l \partial q_i} + \frac{\partial y_j}{\partial q_k} \frac{\partial^2 y_j}{\partial q_l \partial q_i} + \frac{\partial z_j}{\partial q_k} \frac{\partial^2 z_j}{\partial q_l \partial q_i} \right) \dot{q}_k \dot{q}_l \right] \tag{24}$$

また，T を $\dot{q}_i$ で微分して，

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j m_j \left[\sum_k \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_k} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + \frac{\partial y_j}{\partial q_k} \frac{\partial y_j}{\partial q_i} + \frac{\partial z_j}{\partial q_k} \frac{\partial z_j}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \right] \tag{25}$$

さらにこれを時間 t について全微分して次式を得る。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) &= \sum_j m_j \Bigg[\sum_k \Bigg(\frac{\partial x_j}{\partial q_k}\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\ddot{q}_k + \sum_l \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_k \partial q_l}\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\dot{q}_k\dot{q}_l + \sum_l \frac{\partial x_j}{\partial q_k}\frac{\partial^2 x_j}{\partial q_i \partial q_l}\dot{q}_k\dot{q}_l \\
&\qquad + \frac{\partial y_j}{\partial q_k}\frac{\partial y_j}{\partial q_i}\ddot{q}_k + \sum_l \frac{\partial^2 y_j}{\partial q_k \partial q_l}\frac{\partial y_j}{\partial q_i}\dot{q}_k\dot{q}_l + \sum_l \frac{\partial y_j}{\partial q_k}\frac{\partial^2 y_j}{\partial q_i \partial q_l}\dot{q}_k\dot{q}_l \\
&\qquad + \frac{\partial z_j}{\partial q_k}\frac{\partial z_j}{\partial q_i}\ddot{q}_k + \sum_l \frac{\partial^2 z_j}{\partial q_k \partial q_l}\frac{\partial z_j}{\partial q_i}\dot{q}_k\dot{q}_l + \sum_l \frac{\partial z_j}{\partial q_k}\frac{\partial^2 z_j}{\partial q_i \partial q_l}\dot{q}_k\dot{q}_l\Bigg)\Bigg] \\
&= \sum_j m_j \Bigg[\sum_k \Bigg(\frac{\partial x_j}{\partial q_k}\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\ddot{q}_k + \sum_l \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_k \partial q_l}\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\dot{q}_k\dot{q}_l \\
&\qquad + \frac{\partial y_j}{\partial q_k}\frac{\partial y_j}{\partial q_i}\ddot{q}_k + \sum_l \frac{\partial^2 y_j}{\partial q_k \partial q_l}\frac{\partial y_j}{\partial q_i}\dot{q}_k\dot{q}_l \\
&\qquad + \frac{\partial z_j}{\partial q_k}\frac{\partial z_j}{\partial q_i}\ddot{q}_k + \sum_l \frac{\partial^2 z_j}{\partial q_k \partial q_l}\frac{\partial z_j}{\partial q_i}\dot{q}_k\dot{q}_l\Bigg)\Bigg] + \frac{\partial T}{\partial q_i} \qquad (26)
\end{aligned}
$$

これを用いると，式 (20) は式 (2) となる。

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i
$$

なお，証明は省くが，座標変換式が時間に依存して変化する場合，つまり，式 (8)〜(10) の右辺が時間 t を含む場合にも，式 (2) は成立する。

3 Lagrange 運動方程式の誘導 (その 2：変分原理による誘導)

Lagrange の運動方程式は，仮想仕事の原理 (3.1 節) を動力学に適用し (3.3 節)，一般化座標で表示する (3.5 節) ことにより導くことができる。以下に，それを順に説明する。

3.1 静力学における変分原理 (仮想仕事の原理)

> 質点系がつりあっているとき，可能な任意の仮想変位に対して内力および外力のする仮想仕事の総和はゼロとなる（**仮想仕事の原理**）。

$m_1, m_2, m_3, \cdots$ の質点より構成される質点系（連続体も，無数の質点で構成される一種の質点系とみなすことができる）を考える [4]。質点 m_i に作用する力 $\boldsymbol{F}_i$ を拘束力 $\boldsymbol{R}_i$ とそれ以外の作動力 $\boldsymbol{F}_i^{(a)}$ に分けて表すと，力のつりあいより，

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{R}_i + \boldsymbol{F}_i^{(a)} = 0$$

が成立する。ここでは，滑らかな拘束力（変位方向に垂直な拘束力，または作用点を変位させない拘束力）のみを考える（つまり，滑りを伴う摩擦力等は含まないものとする)。

この式に質点の仮想的な変位 $\delta \boldsymbol{r}_i$ をかけて（内積して）全質点について加えあわせ，$\sum_i \boldsymbol{R}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$ であることを用いると，次式となる。

$$\delta^* W = \sum_i (\boldsymbol{R}_i + \boldsymbol{F}_i^{(a)}) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_i \boldsymbol{F}_i^{(a)} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{27}$$

$\delta^* W$ を仮想変位 $\delta \boldsymbol{r}_i$ の際の仮想仕事という[*1]。

3.2 仮想仕事の原理の補足（参考）

■剛体 .

> (1) 剛体では，内力による仮想仕事はゼロである。

物体内の 2 点間に何らかの力（内力）が働き，その 2 点の相対位置が変化すると，その内力は仕事をする。弾性体では，これは弾性ひずみエネルギーの変化となる。剛体では変形が生じないので，剛体の内力は仕事をしない。したがって対象が単一の剛体である場合は，仮想仕事 $\delta^* W$ には外力によるものだけを考えればよい。

■弾性体 .

> (2) 質点系の内力が保存力 (弾性力) である場合，外力のする仮想仕事は内力のポテンシャルエネルギー (ひずみエネルギー) の増加量に等しい。

[*1] 仮想仕事を δW ではなく，$\delta^* W$ と表したのは，ある物理量 W の変化量 (変分) の意味ではないことを示すためである。後述の δU にはポテンシャルエネルギー U という物理量があり，δU はポテンシャルエネルギー U の変化量であるが，$\delta^* W$ には対応する物理量 W が存在するとは限らない。

作動力 $\boldsymbol{F}_i^{(a)}$ の一部，たとえば内力 $\boldsymbol{F}_i^{(in)}$ が保存力 (弾性ひずみエネルギー等) である場合，ポテンシャルエネルギー $U^{(in)}$ を用いて

$$\boldsymbol{F}_i^{(in)} = -\nabla_i U^{(in)}$$
$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i},\ \frac{\partial}{\partial y_i},\ \frac{\partial}{\partial z_i}\right)$$

と表すこととができ，保存力のなす仮想仕事は対応するポテンシャルエネルギーの減少量となる。

$$\delta^* W^{(in)} = -\sum_i \nabla_i U^{(in)} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = -\sum_i \delta U_i^{(in)} = -\delta U^{(in)}$$

$U^{(in)}$ はすべての保存力によるポテンシャルエネルギーである。

例えば，２個の質点がばねで引き合っている場合，引き合っている方向（内力の方向）へ各質点が変位すると，ばねのポテンシャルエネルギーが減少する。弾性体でも内力の方向へ各部が変位する（ひずみが緩む）と，ひずみエネルギーが減少する。

このとき，仮想仕事の原理は

$$\delta^* W = -\delta U^{(in)} + \delta^* W^{(ex)} = 0$$

または、

$$\delta^* W^{(ex)} = \delta U^{(in)} \tag{28}$$

となる。$\delta^* W^{(ex)}$ は保存力以外の (外力等の) 力による仮想仕事である。

内力，外力の区別は，対象とする系の範囲の選び方によって変わる。上記の $U^{(in)}$ には全ての保存力のポテンシャルエネルギーを含めて扱い，それ以外の力による仮想仕事を $\delta^* W^{(ex)}$ に含めればよい。

(3) 質点系に働く力がすべて保存力である場合，つりあい状態では全ポテンシャルエネルギーが停留値（極小値）となる。

さらに，外力も含めて全ての力が保存力である場合, すべての力の仮想仕事はポテンシャルエネルギー U の減少量になるので，仮想仕事の原理は

$$\delta^* W = -\delta U = 0$$

となる。

仮想仕事の原理は，拘束力を含めて力のつりあいが複雑となる場合に威力を発揮する。以下にいくつかの例を挙げて示す。

■例１：てこのつりあい　Fig. 1 に示す長さ $l_1 + l_2$ のてこにおいて，鉛直力 P と水平力 Q がつりあう条件を求める [5]。

θ の仮想的な変化 $\delta\theta$ に際して，力 P, Q が行う仮想仕事は

$$\delta^* W = P l_1 \delta\theta \cos\theta - Q l_2 \delta\theta \sin\theta = (P l_1 \cos\theta - Q l_2 \sin\theta)\delta\theta$$

となる。てこ部材内の内力や支点に作用する力は，てこの回転に際して仕事をしないので，ここでは考えなくてよい。

つり合っているときには任意の $\delta\theta$ に際して $\delta^* W = 0$ となることから,

$$P l_1 \cos\theta - Q l_2 \sin\theta = 0$$

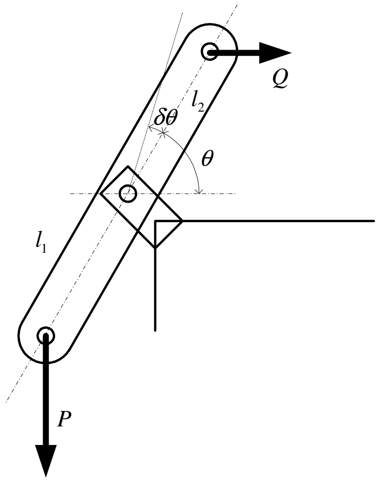

Fig. 1 てこ

つまり，

$$\tan\theta = \frac{Pl_1}{Ql_2}$$

となる。

■例２：差動滑車　Fig. 2 に示す差動滑車（チェンブロック）において，Q を持ち上げるのに要する力 P を求める [5]。

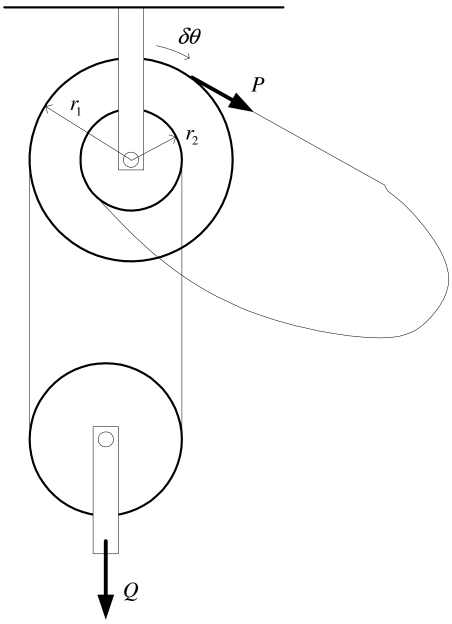

Fig. 2 差動滑車

微小な滑車の回転 $\delta\theta$ に際して，力 P, Q が行う仮想仕事は

$$\delta^* W = Pr_1\delta\theta - Q\frac{r_1 - r_2}{2}\delta\theta = \left(Pr_1 - Q\frac{r_1 - r_2}{2}\right)\delta\theta$$

となる。P, Q 以外の力は，仕事をしないので考えなくてよい。

つりあう条件は，任意の $\delta\theta$ に際して $\delta^* W = 0$ となることから，

$$P = Q\frac{r_1 - r_2}{2r_1}$$

となる。

■例３：ひし形リンク　Fig. 3 に示すひし形リンクにおいて，鉛直力 P と水平力 Q の関係を求める [5]。

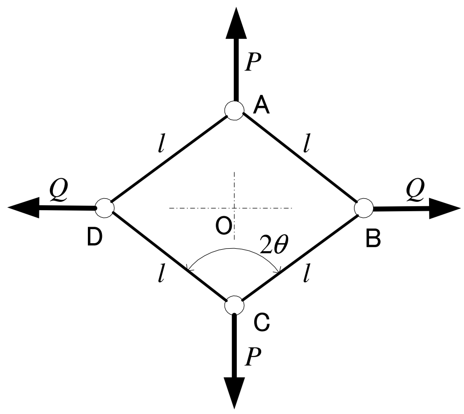

Fig. 3　ひし形リンク

$\angle\mathrm{BCD} = 2\theta$ のとき，

$$\overline{\mathrm{OA}} = l\cos\theta$$
$$\overline{\mathrm{OB}} = l\sin\theta$$

これより，θ の変化 $\delta\theta$ の際の $\overline{\mathrm{OA}}$，$\overline{\mathrm{OB}}$ の変化量は

$$\delta(\overline{\mathrm{OA}}) = -l\sin\theta\delta\theta$$
$$\delta(\overline{\mathrm{OB}}) = l\cos\theta\delta\theta$$

となり，P, Q による仮想仕事は

$$\delta^* W = 2\{P\delta(\overline{\mathrm{OA}}) + Q\delta(\overline{\mathrm{OB}})\} = 2l(-P\sin\theta + Q\cos\theta)\delta\theta$$

となる。

つりあう条件は，任意の $\delta\theta$ に際して $\delta^* W = 0$ となることから，

$$Q = P\tan\theta$$

となる。

■例４：ばね付ひし形リンク　Fig. 4 に示すようなひし形リンクの $\overline{\mathrm{BD}}$ 間にばね定数 コイルばねが取り付けられて，圧縮加重を支える構造とする。コイルばねの自然長が $2L_0$ であるとき，下端の C 位置に質量 M の重りをつるしたときの角度 θ の値を求める [4]。

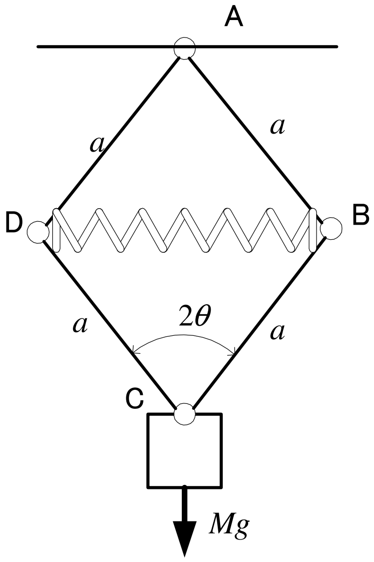

Fig. 4　ばね付ひし形リンク

$\angle\mathrm{BCD} = 2\theta$ のとき，コイルばねの長さは

$$\overline{\mathrm{BD}} = 2a\sin\theta$$

であり，ばねのポテンシャルエネルギーは

$$U_s = \frac{1}{2}k(2L_0 - \overline{\mathrm{BD}})^2 = 2k(L_0 - a\sin\theta)^2$$

である。

またこのとき，

$$\overline{\mathrm{AC}} = 2a\cos\theta$$

であり，重りのポテンシャルエネルギーは

$$U_g = -Mg\overline{\mathrm{AC}} = -2Mga\cos\theta$$

である。したがって，全ポテンシャルエネルギーは

$$U = U_s + U_g = 2k(L_0 - a\sin\theta)^2 - 2Mga\cos\theta$$

となる。

θ の変化 $\delta\theta$ の際の仮想仕事は

$$\delta^* W = -\delta U = 4k(L_0 - a\sin\theta)(-a\cos\theta\delta\theta) + 2Mga\sin\theta\delta\theta = 2a\{-2k(L_0 - a\sin\theta)\cos\theta + Mg\sin\theta\}\delta\theta$$

となる。

つりあう条件は，任意の $\delta\theta$ に際して $\delta^* W = 0$ となることから，

$$Mg\sin\theta = 2k(L_0 - a\sin\theta)\cos\theta$$

となる。この式は $\sin\theta$ の 4 次方程式となり，$0 < \sin\theta < L_0/a$ について解くことができれば， θ が求まる。

■例５：２個のコイルばね　Fig. 5 の 2 自由度系において，m_1 に外力 f_1 が作用し，m_2 に外力 f_2 が作用したときの変位 x_1 ，x_2 を求める問題を考える。

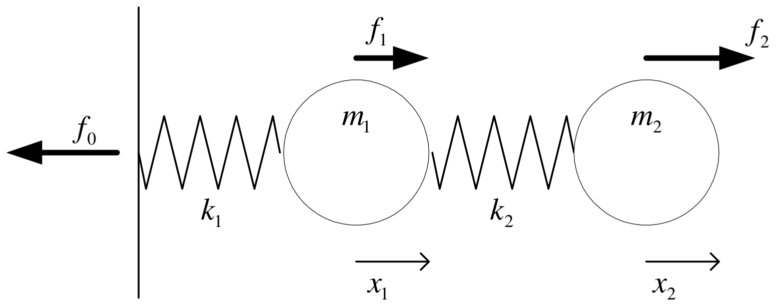

Fig. 5　ばねで結合した 2 個の重り

x_1，x_2 の仮想変位 δx_1，δx_2 に際して，外力 $f_1 f_2$ による仮想仕事は

$$\delta^* W^{(ex)} = f_1\delta x_1 + f_2\delta x_2$$

また内力によるばねのポテンシャルエネルギーは

$$U^{(in)} = \frac{1}{2}k_1{x_1}^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2$$

であるので，

$$\delta U^{(in)} = k_1 x_1 \delta x_1 + k_2(x_2 - x_1)(\delta x_2 - \delta x_1)$$

したがって，仮想仕事の原理は次式となる。

$$\begin{aligned}\delta^* W &= -\delta U^{(in)} + \delta^* W^{(ex)} \\ &= -k_1 x_1 \delta x_1 - k_2(x_2 - x_1)(\delta x_2 - \delta x_1) + f_1\delta x_1 + f_2\delta x_2 \\ &= \{-k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) + f_1\}\delta x_1 + \{-k_2(x_2 - x_1) + f_2\}\delta x_2 = 0\end{aligned} \tag{29}$$

任意の δx_1，δx_2 に対して成立するためには，次式でなければならない。

$$\begin{aligned}-k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) + f_1 &= 0 \\ -k_2(x_2 - x_1) + f_2 &= 0\end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{f_1 + f_2}{k_1} \\ x_2 &= \frac{f_1 + f_2}{k_1} + \frac{f_2}{k_2}\end{aligned}$$

となる。

3.3 動力学における変分原理 (Hamilton の原理)

N 個の質点より構成される質点系（または $N \to \infty$ として連続体）のある運動 $\boldsymbol{r}_i(t)$ $(t_1 \le t \le t_2)$ を考える [5][2]。この運動には，質点間の距離やある決まった軌道等々のいくつかの拘束条件が課されているものとする。

ここで，同じく拘束条件を満たすがこれとは少し異なった運動

$$\boldsymbol{r}'_i(t) = \boldsymbol{r}_i(t) + \delta\boldsymbol{r}_i(t) \quad (t_1 \le t \le t_2)$$

を考える。ただし，運動の開始および終了時では，各質点の座標は同一であるものとする。

$$\delta\boldsymbol{r}_i(t_1) = \delta\boldsymbol{r}_i(t_2) = 0 \tag{30}$$

$\delta\boldsymbol{r}_i(t)$ は 2 つの運動の差であり，各時刻での仮想変位と考えることができる。仮想変位 $\boldsymbol{r}_i(t_1)$ は，拘束条件および式 (30) を満たすこと以外は任意に選べるものとする。

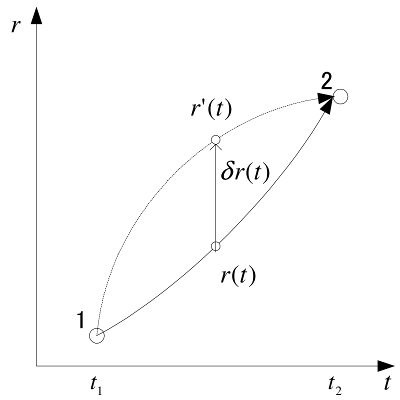

Fig. 6 Hamilton の原理

i 番目の質点には内力，外力合わせていくつかの力が作用する。それらの力を，可能な変位に対して仕事をしない力（拘束力がこれに該当）$\boldsymbol{R}_i$ とそれ以外の作動力 $\boldsymbol{F}_i$ に分けて考える。このとき i 番目の質点の運動方程式は次式で表される。

$$\boldsymbol{R}_i + \boldsymbol{F}_i - m_i \frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2} = 0 \tag{31}$$

慣性力 $-m_i \frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2}$ を力と考えれば，これは，静力学と同一であるから，3.1 節の仮想仕事の原理 (27) を適用できる。

式 (31) に，その時刻の仮想変位 $\delta\boldsymbol{r}_i(t)$ をかけて（内積して）加え合わせ，$\sum_i \boldsymbol{R}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0$ であることを考慮すると，次式となる。

$$\sum_i \left(\boldsymbol{F}_i - m_i \frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2} \right) \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0$$

これは，任意の時刻で成立しているので，これを時間 $t_1 \le t \le t_2$ にわたって積分して次式を得る。

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\boldsymbol{F}_i - m_i \frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2} \right) \cdot \delta\boldsymbol{r}_i dt = 0 \tag{32}$$

ここで被積分関数の第 1 項

$$\delta^* W = \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i \tag{33}$$

は，ある時刻 t における仮想変位 $\delta \boldsymbol{r}_i$ に伴う仮想仕事の総和である。

第 2 項 の積分を部分積分すると，

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \sum_i m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r}_i}{dt^2} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i dt &= \left[\sum_i m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_i m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} \cdot \frac{d\delta \boldsymbol{r}_i}{dt} dt \\
&= - \int_{t_1}^{t_2} \sum_i m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} \cdot \frac{d\delta \boldsymbol{r}_i}{dt} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \sum_i m_i \delta \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} \right)^2 \right\} dt \\
&= - \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt
\end{aligned}$$

ただし，T は系の運動エネルギーの総和

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} \right)^2 \tag{34}$$

であり，δT はその変分である。

これを式 (32) に用いると，拘束条件と式 (30) を満たす任意の仮想変位 $\delta \boldsymbol{r}_i(t)$ に対して，次式が成立する。

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} (\delta^* W + \delta T) dt = 0 \tag{35}$$

式 (35) を **Hamilton の原理**という。

式 (31) の Newton の運動方程式が成り立てば，任意の仮想変位 $\delta \boldsymbol{r}_i(t)$ に対して式 (35) の Hamilton の原理が成り立つ。また，逆に，式 (35) が任意の仮想変位 $\delta \boldsymbol{r}_i(t)$ に対して成立すれば，任意の時刻で，式 (31) が成立する。従って Newton の運動方程式と Hamilton の原理は等価である。

すべての力 $\boldsymbol{F}_i$ が保存力 (ポテンシャルエネルギーから導かれる力) である場合，

$$\boldsymbol{F}_i = -\nabla_i U = \left(\ -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad -\frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad -\frac{\partial U}{\partial z_i} \ \right)$$

等と表され，式 (33) の仮想仕事は，

$$\begin{aligned}
\delta^* W &= \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = - \sum_i \nabla_i U \cdot \delta \boldsymbol{r}_i \\
&= - \sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial U}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial U}{\partial z_i} \delta z_i \right) = - \sum_i \delta U_i = -\delta U
\end{aligned}$$

となる。従って，この場合には式 (35) は次式で表せる。

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \tag{36}$$

ただし，$L = T - U$ は **Lagrange 関数**と呼ばれる。この式より，保存力のもとで実現される運動は Lagrange 関数の時間積分値が停留値（極小値）をとることがわかる。式 (36) を Hamilton の原理と呼ぶ場合もある。

3.4　変分法における Euler の方程式

前節の Lagrange 関数は関数 $\boldsymbol{r}_i(t)$ 等に依存して値が変わる一種の関数である。関数の関数を汎関数という。

独立変数 t ，関数 $y(t)$ およびその導関数 $\dot{y}(t) = dy(t)/dt$ を含む汎関数 $F(t,\ y(t),\ \dot{y}(t))$ の時間積分

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(t,\ y,\ \dot{y})dt \tag{37}$$

を考える。J も関数 $y(t)$ に依存する汎関数である。J を極大または極小にする $y(t)$ を求める方法について考える。

関数 $y(t)$ の微小変化を $\delta y(t)$ とするとき，J の変化量 (変分) は次式となる。

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \delta F(t,\ y,\ \dot{y})dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\delta \dot{y} \right) dt$$

上の積分の第 2 項に部分積分を適用し，$\delta y(t_1) = \delta y(t_2) = 0$ を用いると，

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\delta \dot{y}dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\frac{d(\delta y)}{dt}dt = \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\delta y \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right)\delta y dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right)\delta y dt$$

となるので，

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) \right\} \delta y dt$$

任意の $\delta y(t)$ に対して $\delta J = 0$ となるためには，次式を満たさなければならない。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

この式は**変分法における Euler の方程式** と呼ばれている。

Lagrange 関数を一般化座標 q_i とその時間微分 $\dot{q}_i$ で表して，上式の F に用いると次式が得られる。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

これは，力がすべて保存力の場合の Lagrange の運動方程式となっている。つまり，力がすべて保存力である場合，Lagrange の運動方程式は 式 (36) の Hamilton の原理そのものである。

3.5　Lagrange の運動方程式

非保存力を含む一般の場合について，Lagrange の運動方程式を導く。

ある力学系の自由度が n であるとして，運動エネルギー T を一般化座標 q_i とその時間微分 $\dot{q}_i$ および時間 t の関数として，次式で表すことができる。

$$T = T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n, q_1, q_2, \cdots, q_n, t) \tag{38}$$

この時，仮想変位 δq_i に伴う運動エネルギーの変分は，

$$\delta T = \sum_i \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right) = \sum_i \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\delta q_i}{dt} \right)$$

となる。総和記号は全ての i 等について行うものとする。

また，仮想仕事は次式で表される。

$$\delta^* W = \sum_j \boldsymbol{F}_j \cdot \delta \boldsymbol{r}_j = \sum_j \boldsymbol{F}_j \left(\sum_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_j}{\partial q_i} \delta q_i \right) = \sum_i \left(\sum_j \boldsymbol{F}_j \frac{\partial \boldsymbol{r}_j}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_i Q_i \delta q_i$$

ただし，Q_i は次式の一般化力である。

$$Q_i = \sum_j \boldsymbol{F}_j \frac{\partial \boldsymbol{r}_j}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{39}$$

δT，$\delta^* W$ を Hamilton の原理 (35) に用いると次式となる。

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} (\delta^* W + \delta T) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(Q_i \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \frac{d \delta q_i}{dt} \right) dt = 0$$

ここで δq_i をくくり出すために第 3 項の積分に部分積分を用いて，

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \frac{d \delta q_i}{dt} dt = \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt$$

と変形すると，次式が得られる。

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left\{ Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \right\} \delta q_i dt = 0 \tag{40}$$

これが任意の仮想変位 $\delta q_i(t)$ に対して成立するためには，

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

でなければばならない。これは式 (2) の Lagrange の運動方程式である。一般化力 Q_i の一部が保存力となる場合は，その力をポテンシャルエネルギーで表して式 (4) となる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q'_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

3.6 適用例

■2 自由度系強制振動　再び Fig. 5 に戻って，2 個の重りの強制振動を考える。重りの重心の平衡位置からの変位 $x_1(t)$, $x_2(t)$ を座標として選ぶと，運動エネルギー，ポテンシャルエネルギーは次式となる。

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \tag{41}$$

$$U = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 \tag{42}$$

これより，

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1, \quad \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x_1} = k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2, \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x_2} = k_2 (x_2 - x_1)$$

となるので，これらを式 (4) に用いて，運動方程式は次式となる。

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) = f_1 \tag{43}$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) = f_2 \tag{44}$$

■斜面を転がり落ちる円筒　Fig. 7 に示すように，傾斜角 α の斜面上を，最大傾斜方向へ転がり落ちる円筒の運動を取り上げる。円筒の質量を m，重心回りの慣性モーメントを J とし，重心の移動距離を x，回転角度を θ で表す。円筒と斜面間には滑りが生じないとすると，次の条件 (拘束条件) を満たさねばならない。

$$x = r\theta \tag{45}$$

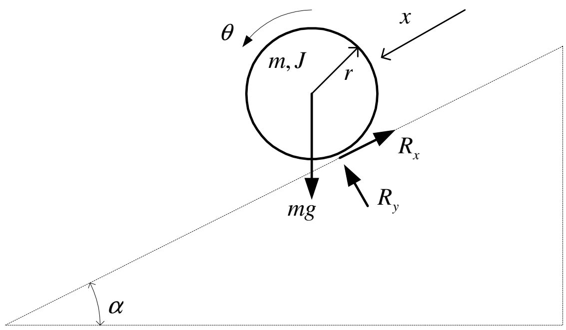

Fig. 7　斜面を転がり落ちる円筒

座標として x を選ぶと，円筒の運動エネルギーおよびポテンシャルエネルギーは次式となる。

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{J}{r^2}\dot{x}^2 \tag{46}$$

$$U = -mgx\sin\alpha \tag{47}$$

これより，$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \left(m + \frac{J}{r^2}\right)\dot{x}$，$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$，$\frac{\partial U}{\partial x} = -mg\sin\alpha$ となるので，これらを式 (4) に用いて，運動方程式は次式となる。

$$\left(m + \frac{J}{r^2}\right)\ddot{x} - mg\sin\alpha = 0 \tag{48}$$

ここでは仕事をしない拘束力 R_x，R_y はまったく現れないことに注意されたい。

■球内面を転がる小球　少し複雑な例として，半径 r_1 の中空球内面を半径 r_2 で質量 m，慣性モーメント J の小球が転がるときの運動を考える。簡単のために，小球の運動の範囲を中空球の中心を通る鉛直面内に限定する。Fig. 8 に示すように，小球が最下部にある平衡状態を原点とし，小球の重心位置を θ_1 ，小球の回転角を θ_2 と表すと，小球が中空球内面を転がった距離から，次の関係

$$r_1\theta_1 = r_2(\theta_2 + \theta_1)$$

つまり次式の関係が成立している。

$$(r_1 - r_2)\theta_1 = r_2\theta_2 = s \tag{49}$$

s は，小球重心の移動距離である。

小球には重力 mg のほかに，拘束力 R_r ，R_s が作用するが，これらの拘束力は小球が転がっている間は仕事をしない。したがって，小球の運動エネルギー，重力ポテンシャルエネルギーは次式となる。

$$T = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}_2^2 \tag{50}$$

$$U = -mg(r_1 - r_2)\cos\theta_1 \tag{51}$$

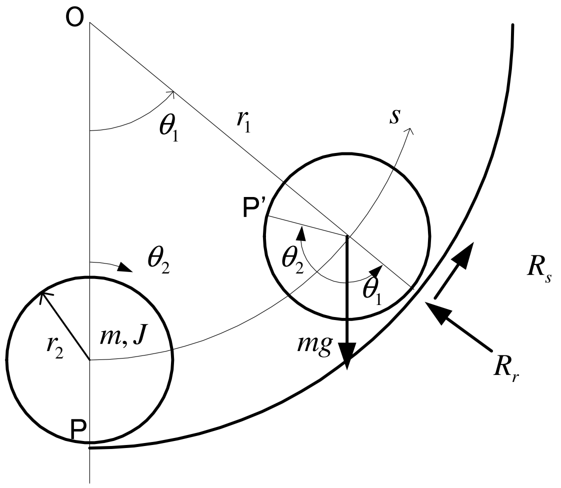

Fig. 8 球内面を転がる小球

独立な座標として θ_1 を選ぶと，条件 (49) を用いて T は次式となる。

$$T = \frac{1}{2}\left(m + \frac{J}{r_2^2}\right)(r_1 - r_2)^2\dot{\theta}_1^2 \tag{52}$$

これより，$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \left(m + \frac{J}{{r_2}^2}\right)(r_1 - r_2)^2\dot{\theta}_1$，$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$，$\frac{\partial U}{\partial \theta} = mg(r_1 - r_2)\sin\theta_1$ となるので，これらを式 (4) に用いて，運動方程式は次式となる。

$$\left(m + \frac{J}{{r_2}^2}\right)(r_1 - r_2)^2\ddot{\theta}_1 + mg(r_1 - r_2)\sin\theta_1 = 0 \tag{53}$$

4　粘性減衰と散逸関数

粘性摩擦等による抵抗力は保存力ではないので，式 (4) の Lagrange 式では，Q'_i に含めて計算される。q_i が x 座標等の長さを表す座標の場合は，この粘性力を求めるのは比較的容易であるが，q_i が 角度等である場合は混乱を生じやすい。このような場合，以下の散逸関数を用いると計算が容易である。

速度に比例する抵抗力を対象とすると，第 i 番目の質点にはたらく抵抗力の x, y, z 成分は，減衰係数 c_{xi}, c_{yi}, c_{zi} を用いて，次式で表すことができる。

$$F_{xi} = -c_{xi}\dot{x}_i, \qquad F_{yi} = -c_{yi}\dot{y}_i, \qquad F_{zi} = -c_{zi}\dot{z}_i$$

従って，N 個の質点系に対して，関数 Φ を

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(c_{xi}\dot{x}_i^2 + c_{yi}\dot{y}_i^2 + c_{zi}\dot{z}_i^2\right) \tag{54}$$

で定義すると，抵抗力は次式で求めることができる。

$$F_{xi} = -\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}_i}, \qquad F_{yi} = -\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}_i}, \qquad F_{zi} = -\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}_i}$$

この Φ は，摩擦抵抗力により力学的エネルギーが熱エネルギーに変わる (散逸する) 単位時間当たりのエネルギー量 (の 1/2) を表しており，**Rayleigh の散逸関数**と呼ばれる [1]。

式 (54) は散逸関数を x_i, y_i, z_i の関数 $\Phi(x_i, y_i, z_i)$ として表しているが， x_i, y_i, z_i を一般化座標 q_i で表すことができる。

$$\Phi(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n, q_1, q_2, \cdots, q_n)$$

一般化座標 q_i 方向の抵抗による一般化力は $-\partial\Phi/\partial\dot{q}_i$ であるため，減衰力を伴う場合の Lagrange の運動方程式は，次式で表される。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_i} = Q''_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{55}$$

ここで，Q''_i は保存力および抵抗力以外の一般化力である。

参考文献

[1] 小出昭一郎, ”**物理入門コース２ 解析力学**”, 岩波書店 (1983), pp.1-60.

[2] 小野 周, ”**岩波講座基礎工学** 1 **力学**　”, 岩波書店 (1968), pp.347-383.

[3] 国富 信夫 他, ”**工業基礎物理** (**上**)”, 東京書籍 (1981)，pp.115-117.

[4] 国井修二郎 他, ”**力学**　”, 丸善 (1958)，pp.66-74.

[5] Timoshenko, Young, ”Engineering Mechanics”, McGraw-Hill(1956)，pp.216-241.