

第9回 完全ガスの状態変化(3/3)

1. ポリトロープ変化

以上の4つの変化で、 p と V の関係は次式で表される。

- $p = \text{const.}$ (可逆等圧変化)
- $V = \text{const.}$ (" 等積変化)
- $pV = \text{const.}$ (" 等温変化)
- $pV^\kappa = \text{const.}$ (" 断熱変化)

これらは、

$$pV^n = \text{const.}$$

(ただし、 $n = \text{const.}$)

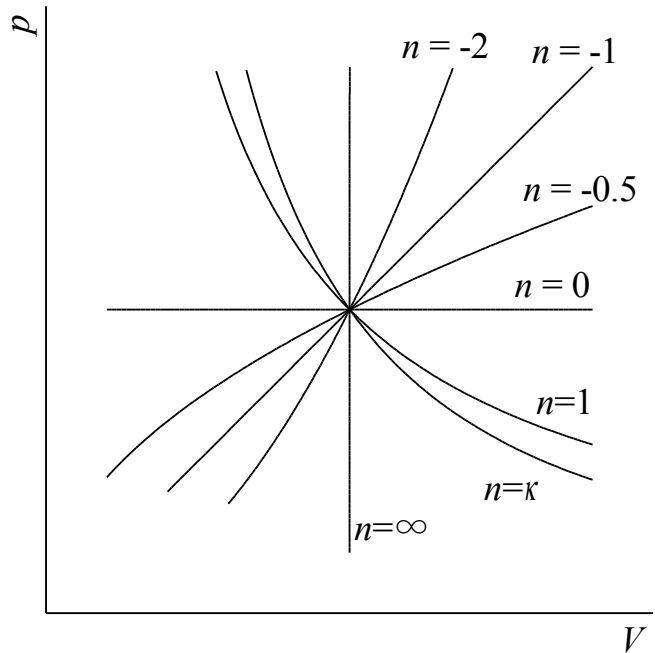
において、

$n = 0, \infty, 1, \kappa$ としたものである。

上式で表される変化を

ポリトロープ変化、

n をポリトロープ指数 という。



これに $pV \propto T$ を用いると、

$$TV^{n-1} = \text{const.}$$

$$\frac{T}{p^{\frac{n-1}{n}}} = \text{const.}$$

2. H および U (全変化に共通)

$$U_2 - U_1 = G c_v (T_2 - T_1) , \quad H_2 - H_1 = G c_p (T_2 - T_1)$$

3. W , W^*

外へ行った絶対仕事は定義より、

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_1^2 p dV = p_1 V_1^n \int_1^2 \frac{1}{V^n} dV = \frac{p_1 V_1^n}{1-n} (V_2^{1-n} - V_1^{1-n}) \\ &= \frac{1}{n-1} (p_1 V_1 - p_2 V_2) = \frac{GR}{n-1} (T_1 - T_2) \\ &= \frac{p_1 V_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right] = \frac{p_1 V_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right] \end{aligned}$$

工業仕事は,

$$\begin{aligned}
 W_{12}^* &= -\int_1^2 V dp = -p_1^{1/n} V_1 \int_1^2 \frac{1}{p_1^{1/n}} dp \\
 &= -\frac{1}{1-1/n} p_1^{1/n} V_1 (p_2^{1-1/n} - p_1^{1-1/n}) = \frac{n}{n-1} (p_1 V_1 - p_2 V_2) \\
 &= \frac{nGR}{n-1} (T_1 - T_2) = \frac{n p_1 V_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right] = \frac{n p_1 V_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right] \\
 &= n W_{12}
 \end{aligned}$$

4. また, 加熱量 Q_{12} は,

エネルギー式から

$$\begin{aligned}
 Q_{12} &= U_2 - U_1 + W_{12} = Gc_v(T_2 - T_1) - \frac{GR}{n-1}(T_2 - T_1) \\
 &= Gc_v \left(1 - \frac{\kappa-1}{n-1} \right) (T_2 - T_1) = Gc_v \frac{n-\kappa}{n-1} (T_2 - T_1)
 \end{aligned}$$

または

$$\begin{aligned}
 Q_{12} &= Gc_n(T_2 - T_1) \\
 c_n &= c_v \frac{n-\kappa}{n-1} \quad c_n : \text{ポルトロープ比熱}
 \end{aligned}$$

記憶すべき完全ガスの状態変化関係式(完全ガス 単位質量あたりの値を示す)

変化(過程)	等圧変化	等積変化	等温変化	断熱変化	ポルトロープ変化
$p-v-T$ 関係				$p v^\kappa = \text{const.}$ $T v^{\kappa-1} = \text{const.}$ $\frac{T}{p^{(\kappa-1)/\kappa}} = \text{const.}$	$p v^n = \text{const.}$ $T v^{n-1} = \text{const.}$ $\frac{T}{p^{(n-1)/n}} = \text{const.}$
比熱 c	$c_p = \frac{\kappa R}{\kappa-1}$	$c_v = \frac{R}{\kappa-1}$	∞	0	$c_n = c_v \frac{n-\kappa}{n-1}$
熱量 q_{12}			$RT \ln \frac{v_2}{v_1}$		
絶対仕事 w_{12}			$= q_{12}$	$-c_v(T_2 - T_1)$	$-\frac{R}{n-1}(T_2 - T_1)$
工業仕事 w_{12}^*			$= q_{12}$	$-c_p(T_2 - T_1)$	$-\frac{nR}{n-1}(T_2 - T_1)$
内部エネルギー	$du = c_v dT$				
エンタルピー	$dh = c_p dT$				
エントロピー	$s_2 - s_1 = c_v \ln(p_2/p_1) + c_p \ln(v_2/v_1)$ $= c_v \ln(T_2/T_1) + R \ln(v_2/v_1)$ $= c_p \ln(T_2/T_1) - R \ln(p_2/p_1)$				