機械力学参考資料 (定数係数線形微分方程式)

S. Yamauchi

2002 年 4 月 20 日

目 次

$x(t)$ を t の未知関数，a，b および c を定数，$f(t)$ を与えられた t の関数として，次の微分方程式を考える。

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = f(t) \tag{1}$$

これは未知関数 $x(t)$ およびその微係数に関して線形である。

一般に，2 階の微分方程式の解 (一般解) は，2 個の任意定数を含む。線形微分方程式では，解の重ね合わせにより一般解を求めることができる。

ここでは，定数係数線形微分方程式の解き方について述べる。

1 同次微分方程式

1.1 特性方程式と特性根

まず，x を含まない項 $f(t)$ が 0 である場合を考える。

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0 \tag{2}$$

これは，$x(t)$ およびその微係数に関して全て同次 (0 次項を含まず全て 1 次項のみ) であるので，同次方程式と呼ばれる。

定数係数の同次線形微分方程式は，λ をある定数として，

$$x = e^{\lambda t} \tag{3}$$

の形の解を持つ。これを上式に代入すると次の関係式を得る。

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{4}$$

これを式 (2) の特性方程式といい，その根

$$\lambda = \lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right) \tag{5}$$

を特性根という。
　特性根を式 (3) に用いると，

$$x_1(t) \quad = \quad e^{\lambda_1 t} \tag{6}$$
$$x_2(t) \quad = \quad e^{\lambda_2 t} \tag{7}$$

は共に式 (2) の解 (基本解) となることが分かる。従って，C_1 および C_2 を任意定数として，式 (2) の一般解は次式で表される。

$$x = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \tag{8}$$

1.2　特性根と解の性質

判別式が正の場合　特性方程式 (4) の判別式 $D = b^2 - 4ac$ が正であれば，特性根 λ_1，λ_2 は相異なる実数であり，解は 2 つの指数関数の和となる。

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{\frac{1}{2a}\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)t} + C_2 e^{\frac{1}{2a}\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)t} \tag{9}$$

判別式が負の場合　一方，判別式が負の場合は特性根は複素数であり，特性根を

$$\lambda_1 \quad = \quad -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \sigma + i\omega \tag{10}$$
$$\lambda_2 \quad = \quad -\frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \sigma - i\omega \tag{11}$$

と表すと，解は次式で表される。

$$x \quad = \quad e^{\sigma t}\left(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-\omega t}\right) = e^{\sigma t}\left(A \cos \omega t + B \sin \omega t\right) \tag{12}$$
$$\sigma \quad = \quad -\frac{b}{2a} \tag{13}$$
$$\omega \quad = \quad \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \tag{14}$$

ただし，

$$A \quad = \quad C_1 + C_2 \tag{15}$$
$$B \quad = \quad i(C_1 - C_2) \tag{16}$$

これは正弦 (余弦) 振動の振幅が時間的に指数関数状に変化した時の振動 (通常は $\sigma < 0$ であるので減衰振動) である。

判別式が 0 の場合　判別式がゼロ，つまり $D = b^2 - 4ac = 0$ の場合，特性根は重根となる。この場合は，式 (6) および (7) は一致し，

$$x_1(t) = x_2(t) = e^{\lambda_1 t} \tag{17}$$

がひとつの解となる。また，

$$x = tx_1(t) = te^{\lambda_1 t} \tag{18}$$

も式 (2) を満たすので，解である。式 (17) と (18) は 1 次独立である (一方を任意定数倍しても他方に一致しない) ので，これらは基本解であり，従ってこの場合の一般解は次式で表される。

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda_1 t} \tag{19}$$

2　非同次微分方程式

式 (1) において，$f(t) \neq 0$ の場合を考える。右辺に $x(t)$ の 0 次の項を含んでいるので，非同次方程式であるという。

式 (1) のひとつの特解 $x_0(t)$ ，つまり，

$$a\frac{d^2x_0}{dt^2} + b\frac{dx_0}{dt} + cx_0 = f(t) \tag{20}$$

を満たす解が分かっているとする。このとき，式 (1) の一般解は，随伴同次方程式 (2) の一般解とこの特解 $x_0(t)$ とを加えることにより得られる。式 (2) を式 (1) の随伴同次方程式という。

つまり，随伴同次方程式 (2) の一般解を $C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$ とする時，

$$x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + x_0(t) \tag{21}$$

は非同次方程式 (1) の一般解である。このことは，式 (21) を式 (1) に代入してみれば，任意の C_1 および C_2 について成立することから分かる。

次に式 (1) の特解 $x_0(t)$ を求める方法を説明する。

2.1　発見的方法による特解の求め方

特解の形を仮定して，その係数等を定める。どのような形の解を仮定するかについては，ある程度の数学的または物理的な考察に基づく必要がある。

$f(t) = t^m$ 等の場合　特解およびその 1 階，2 階微係数を加え合わせて t^m となれば良いのであるから，t の m 次式

$$x_0(t) = A_m t^m + A_{m-1}t^{m-1} + \cdots + A_1 t + A_0$$

であると仮定して，これが式 (20) を満たすように係数 A_m 等を定めればよい。

$f(t) = \cos\omega t$ or $\sin\omega t$ 等の場合 (ω は定数)　同様に考えて，

$$x_0(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

と仮定して，係数 A ，B を定める。

$f(t)=e^{\sigma t}$ 等の場合 (σ は定数)　同様に考えて，

$$x_0(t)=Ae^{\sigma t}$$

と仮定して，係数 A を定める。

2.2 定数変化法

非同次線形微分方程式の特解を確実に求めるには，定数変化法を使うことができる。少し複雑となるが，以下にそれを示す。

非同次微分方程式 (1) の随伴同次方程式 (2) の一般解が

$$x=Ax_1(t)+Bx_2(t) \tag{22}$$

と表される場合 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$ とする) を考える。

式 (22) に含まれる積分定数 A および B が t の関数 $A(t)$ および $B(t)$ であると見なして，元の非同次方程式 (1) を満たすように $A(t)$ および $B(t)$ を定めようと考える。未知関数が 2 つあるのに対して，条件式が 1 つであるから，さらに 1 つの条件を追加することができる。

まず，式 (22) を t で微分して，

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dA}{dt}x_1+\frac{dB}{dt}x_2+A\frac{dx_1}{dt}+B\frac{dx_2}{dt}$$

ここで追加の条件として，

$$\frac{dA}{dt}x_1+\frac{dB}{dt}x_2=0 \tag{23}$$

を与えるものとする。従って

$$\frac{dx}{dt}=A\frac{dx_1}{dt}+B\frac{dx_2}{dt}$$

となり，これをさらに微分すると次式となる。

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dA}{dt}\frac{dx_1}{dt}+\frac{dB}{dt}\frac{dx_2}{dt}+A\frac{d^2x_1}{dt^2}+B\frac{d^2x_2}{dt^2}$$

x とその微係数を式 (1) に代入し，x_1 および x_2 は式 (2) の解であることを考慮すると次式を得る。

$$\frac{dA}{dt}\frac{dx_1}{dt}+\frac{dB}{dt}\frac{dx_2}{dt}=\frac{1}{a}f(t) \tag{24}$$

式 (23) および (24)

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ \frac{dx_1}{dt} & \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix}\left\{\begin{array}{c} \frac{dA}{dt} \\ \frac{dB}{dt} \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c} 0 \\ \frac{f(t)}{a} \end{array}\right\}$$

を $\frac{dA}{dt}$ および $\frac{dB}{dt}$ に関する連立方程式として解いて，次式を得る。

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= \frac{-\frac{f(t)}{a}x_2}{x_1\frac{dx_2}{dt}-\frac{dx_1}{dt}x_2} \\ \frac{dB}{dt} &= \frac{\frac{f(t)}{a}x_1}{x_1\frac{dx_2}{dt}-\frac{dx_1}{dt}x_2}\end{aligned}$$

これより

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^t \frac{-\frac{f(t)}{a}x_2}{x_1\frac{dx_2}{dt}-\frac{dx_1}{dt}x_2}dt + A_1 \\
B &= \int_0^t \frac{\frac{f(t)}{a}x_1}{x_1\frac{dx_2}{dt}-\frac{dx_1}{dt}x_2}dt + B_1
\end{aligned}
$$

これを式 (22) に用いて，次のように一般解が求まる。

$$
\begin{aligned}
x(t) &= A_1x_1(t) + B_1x_2(t) \\
&+ x_1(t)\int_0^t \frac{-\frac{f(t)}{a}x_2}{x_1\frac{dx_2}{dt}-\frac{dx_1}{dt}x_2}dt + x_2(t)\int_0^t \frac{\frac{f(t)}{a}x_1}{x_1\frac{dx_2}{dt}-\frac{dx_1}{dt}x_2}dt
\end{aligned}
\tag{25}
$$

基本解が

$$
x_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \qquad x_2(t) = e^{\lambda_2 t}
$$

と表される場合 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) を例に挙げると，上の結果は以下のようになる。

$$
\frac{dA}{dt} = \frac{-\frac{1}{a}f(t)e^{\lambda_2 t}}{(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}} = \frac{-f(t)e^{-\lambda_1 t}}{a(\lambda_2-\lambda_1)}, \qquad \frac{dB}{dt} = \frac{\frac{1}{a}f(t)e^{\lambda_1 t}}{(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}} = \frac{f(t)e^{-\lambda_2 t}}{a(\lambda_2-\lambda_1)}
$$

$$
A = \frac{-1}{a(\lambda_2-\lambda_1)}\int_0^t f(t)e^{-\lambda_1 t}dt + A_1, \qquad B = \frac{1}{a(\lambda_2-\lambda_1)}\int_0^t f(t)e^{-\lambda_2 t}dt + B_1
$$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= A_1e^{\lambda_1 t} + B_1e^{\lambda_2 t} \\
&+ \frac{-e^{\lambda_1 t}}{a(\lambda_2-\lambda_1)}\int_0^t f(t)e^{-\lambda_1 t}dt + \frac{e^{\lambda_2 t}}{a(\lambda_2-\lambda_1)}\int_0^t f(t)e^{-\lambda_2 t}dt
\end{aligned}
$$

例　次の非同次微分方程式を考える。

$$
\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = t \tag{26}
$$

この随伴同次方程式

$$
\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0
$$

の一般解は次式である。

$$
x = Ae^{-t} + Be^{-2t} \tag{27}
$$

ここで A と B が t の関数であるとして，$A(t)$ ，$B(t)$ を求める。

$$
\frac{dx}{dt} = e^{-t}\frac{dA}{dt} + e^{-2t}\frac{dB}{dt} - Ae^{-t} - 2Be^{-2t}
$$

において

$$
e^{-t}\frac{dA}{dt} + e^{-2t}\frac{dB}{dt} = 0 \tag{28}
$$

と置くと,

$$
\frac{dx}{dt} = -Ae^{-t} - 2Be^{-2t}
$$

となる。これを式 (26) に代入すると次式となる。

$$-e^{-t}\frac{dA}{dt}-2e^{-2t}\frac{dB}{dt}=t \tag{29}$$

式 (28) および (29)

$$\begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ -e^{-t} & -2e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \frac{dA}{dt} \\ \frac{dB}{dt} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ t \end{Bmatrix}$$

を $\frac{dA}{dt}$ および $\frac{dB}{dt}$ について解いて，次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-2t} \\ t & -2e^{-2t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ -e^{-t} & -2e^{-2t} \end{vmatrix}}=te^{t} \\ \frac{dB}{dt} &= \frac{\begin{vmatrix} e^{-t} & 0 \\ -e^{-t} & t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ -e^{-t} & -2e^{-2t} \end{vmatrix}}=-te^{2t} \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} A &= \int^{t} te^{t}dt=\left[te^{t}\right]-\int^{t}e^{t}dt=te^{t}-e^{t}+A_1 \\ B &= \int^{t} -te^{2t}dt=-\left[\frac{1}{2}te^{2t}\right]+\int^{t}\frac{1}{2}e^{2t}dt=-\frac{1}{2}te^{2t}+\frac{1}{4}e^{2t}+B_1 \end{aligned}$$

これを式 (27) に用いて，次の一般解を得る。

$$x=A_1e^{-t}+B_1e^{-2t}+\frac{1}{2}t-\frac{3}{4} \tag{30}$$

右辺の第 1 項，2 項が随伴同次方程式の一般解であり，第 3 項，4 項が特解である。

参考文献

[1] 田河，生長 他，”**微分積分 II**”, 大日本図書 ().

[2] カルマン，ビオ (村上勇次郎 他訳), ”**工学における数学的方法 上**”, 法政大学出版局 (1954).