連続体の振動方程式 (波動方程式) の誘導

S. Yamauchi

2014 年 12 月 30 日

ここでは，弦の振動，棒の縦振動，コイルばねの縦振動，気柱の振動，棒のねじり振動の運動方程式を導く。

目次

1　弦の振動

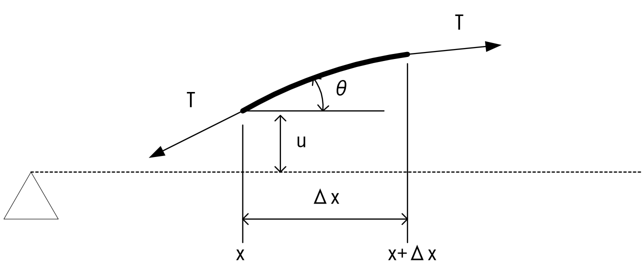

Fig. 1 弦の力の釣り合い

線密度 (単位長さ当りの質量) ρ_l が一様な弦が，一定の張力 T で張られているとする。この弦が振動しても，弦の長さの変化は無視でき，線密度および張力は変わらないものとする。

元の弦の方向を x とし，x に直角で変位が生じる方向を y とし，任意位置の変位を $u(x,t)$ で表す。Figure

1 に示す微小部分について，y 方向の力の釣り合いを考えると，

$$\rho_l \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T(\sin\theta)_{x=x+\Delta x} - T(\sin\theta)_{x=x}$$

ただし，θ は弦が x 軸となす角度であり，$\theta << 1$ として

$$\sin\theta \cong \tan\theta = \frac{\partial u}{\partial x}$$

と近似することができる。さらに，

$$(\sin\theta)_{x=x+\Delta x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x+\Delta x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{x=x} \Delta x + \phi(\Delta x^2)$$

を用いると，運動方程式は

$$\rho_l \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\left\{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{x=x} \Delta x + \phi(\Delta x^2)\right\}$$

つまり，

$$\rho_l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\left\{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{x=x} + \phi(\Delta x)\right\}$$

となる。ここで $\Delta x \to 0$ とすることにより，次の偏微分方程式を得る。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}} \tag{2}$$

上式の c は弦の波動が伝播する速度 (位相速度) である。式 (1) の形の式は空間を伝播する波動を表しており，波動方程式と呼ばれている。

2　弾性体の縦振動

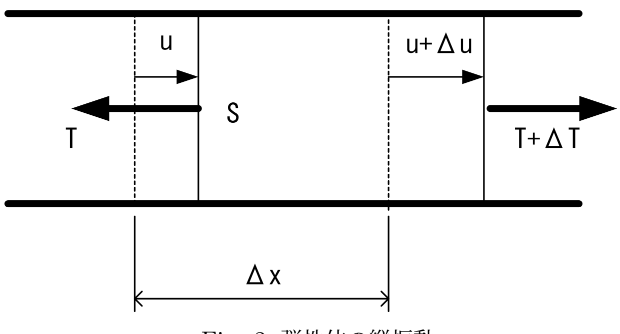

Fig. 2 弾性体の縦振動

棒状の弾性体，つるまきバネ，気柱等の縦振動を考える。断面は一様であるとして，単位長さ当りの質量 (線密度に相当) を ρ_l とする。長さ Δx の微小部分について力の釣り合いより，

$$\rho_l \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (T)_{x=x+\Delta x} - (T)_{x=x}$$

ただし，T は弾性体等の変形により生じる内力 (応力の和であり，引張りを正とする) である。ここで，

$$(T)_{x=x+\Delta x} = (T)_{x=x} + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=x} \Delta x + \phi(\Delta x^2)$$

である事を用いると次式となる。

$$\rho_l \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x + \phi(\Delta x^2)$$

つまり，$\Delta x \to 0$ の極限では，次式が成立する。

$$\rho_l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial x} \tag{3}$$

3 棒の縦振動

棒状の弾性体では，断面積を S，縦弾性係数 (ヤング率) を E とすると，

$$\rho_l = \rho S$$
$$T = ES\epsilon = ES\frac{\partial u}{\partial x}$$

である。ϵ は弾性体の長さ方向の歪 (単位長さ当りの伸び) であり，変位 u を用いて

$$\epsilon = \frac{(u + \Delta u) - u)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

と表される。従って式 (3) は次式となる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4}$$

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{5}$$

式 (4) は前節の式 (1) と同一の方程式 (波動方程式) であり，c は弾性体内を波動 (縦波) が伝播する速度である。

4 コイルバネの縦振動

コイルバネにあっては，ばね定数を k，ばねの質量を m_s，長さを L とすると，

$$T = k\Delta L = kL\epsilon = kL\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\rho_l = \frac{m_s}{L}$$

であるので，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{kL^2}{m_s}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6}$$

$$c = \sqrt{\frac{kL^2}{m_s}} \tag{7}$$

となる。

ばね材料の密度 ρ，横弾性係数 G，素線径 d，コイル有効径 D，有効巻数 n，ばねの有効自然長 L とすると，質量およびばね定数は次式である。

$$m_s = \frac{\pi^2 n\rho D d^2}{4} \tag{8}$$

$$k = \frac{Gd^4}{8nD^3} \tag{9}$$

5　棒のねじり振動

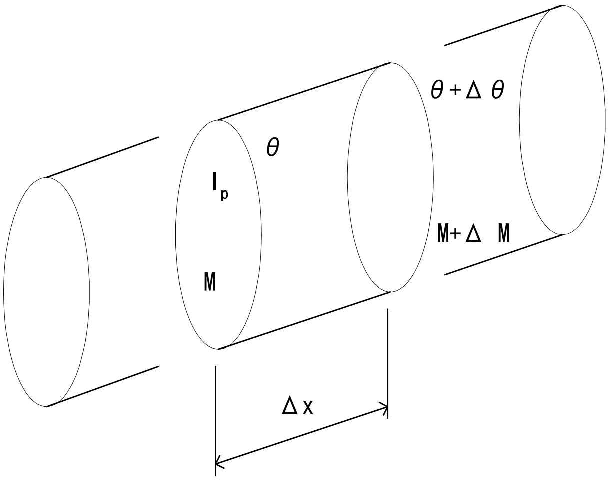

Fig. 3 棒の捩り振動

軸等の棒状の弾性体の捩り振動について考える。断面積 S で断面極 2 次モーメント I_p の断面一様な棒を考える。任意断面 $x = x$ と少し離れた断面 $x = x + \Delta x$ で切り取られる微小部分の釣り合いを考える。慣性モーメントは $\rho\Delta x I_p$ であるから，

$$\rho\Delta x I_p \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = (M)_{x=x+\Delta x} - (M)_{x=x} \tag{10}$$

ただし， M は弾性体等の捩り変形により生じるせん断応力による捩りモーメントであり，x の正の方向に沿って捩れ角 $theta$ を増加させる向きのモーメントを正とする。ここで，

$$(M)_{x=x+\Delta x} = (M)_{x=x} + \left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)_{x=x}\Delta x + \phi(\Delta x^2)$$

である事を用い，$\Delta x \to 0$ とすることにより，次式が求まる。

$$\rho I_p \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \frac{\partial M}{\partial x} \tag{11}$$

捩りモーメントと単位長さ当りの捩り角との間には，横弾性係数 (せん断弾性係数) G と断面極 2 次モーメント I_p を用いて，次の関係が成立する。

$$M = GI_p \frac{\partial\theta}{\partial x}$$

これを上式に用いて，次式を得る。

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = c^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \tag{12}$$

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \tag{13}$$

6 電磁波

■Maxwell の方程式　空間内の閉曲線 C および C を縁とする任意の曲面 S において，次の関係式が成立する。

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_S \left(\sigma\boldsymbol{E} + \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S} \qquad \text{(Ampère の周回路の法則)} \tag{14}$$

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = -\int_S \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S} \qquad \text{(Faraday の電磁誘導の法則)} \tag{15}$$

また，空間内の閉曲面 S_C および S_C で囲まれた空間 V において，次の関係式が成立する。

$$\int_{S_C} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = 0 \qquad \text{(磁場に対する Gauss の法則)} \tag{16}$$

$$\int_{S_C} \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho dV \qquad \text{(電場に対する Gauss の法則)} \tag{17}$$

これらは総称して Maxwell の方程式と呼ばれている[*1]。ここで，$\boldsymbol{D}$ および $\boldsymbol{E}$ は電束密度および電場強さであり，$\boldsymbol{B}$ および $\boldsymbol{H}$ は磁束密度および磁場強さである。これらの間には，空間を構成する物質の誘電率 ϵ および透磁率 μ を用いて次の関係がある。

$$\boldsymbol{D} = \epsilon\boldsymbol{E} \tag{22}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H} \tag{23}$$

また，σ は空間を構成する物質の電気伝導率（$\sigma\boldsymbol{E}$ は電流密度），ρ は空間の電荷密度である。

■振動電流と電磁波　電荷が加速または減速すると，電磁波が生じて周囲へ伝播する。ある回路に電流が流れると，Ampère の法則により回路を一巡する方向に磁場ができる。電流が周期的に変化すると，それに合わせて磁場強さが変化する。ある点の磁場が変化すると，Faraday の法則によりその場に電場が形成され，磁場の変化速度に応じて電場強さも変化する。電場強さ（電束密度）が変化する（変位電流が流れる）と，Ampère の法則により磁場が変化する。このように振動電流と共に各点の電場と磁場が周期的に変化する。

Fig.4 に示すように振動電流の流れる十分長い導線を考える。導線上の点を原点として，導線の方向を z 軸とし，導線から適当に離れた点 P を x 軸上に選ぶ。P における磁場 $\boldsymbol{B}$ は y 軸に平行であり，電場 $\boldsymbol{E}$ は z 軸

[*1] これらを微分形で表示すると，次式となる。

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \sigma\boldsymbol{E} + \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad \text{(Ampère の周回路の法則)} \tag{18}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \text{(Faraday の電磁誘導の法則)} \tag{19}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 \qquad \text{(磁場に対する Gauss の法則)} \tag{20}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho \qquad \text{(電場に対する Gauss の法則)} \tag{21}$$

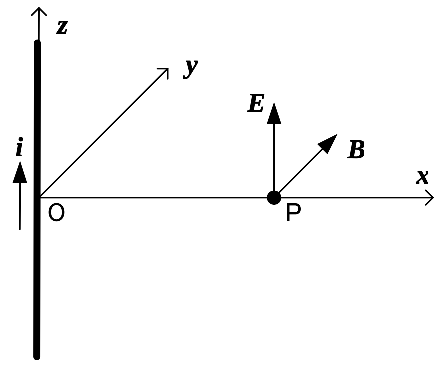

Fig. 4 振動電流による電磁場 (その 1)

と平行となる。なぜなら，$\boldsymbol{B}$ は z 軸を中心とする $x-y$ 面内の円に沿っているはずであり，$\boldsymbol{E}$ は $\boldsymbol{B}$ に垂直で z 軸に関して軸対称となるからである。また，P 点が O から十分離れている場合を考えると，P 点を通り x 軸に垂直な平面上の P の近傍では，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ の大きさは P 点の値に等しいと考えられる。したがって，電場 $\boldsymbol{E}$ および磁場 $\boldsymbol{B}$ の成分は次式で表される。

$$\boldsymbol{E} = (0,\ 0,\ E(t,x)) \tag{24}$$

$$\boldsymbol{B} = (0,\ B(t,x),\ 0) \tag{25}$$

ここで，Fig.5 に示す四辺形 $\overline{PQQ'P'P}$ に沿って Maxwell の第 1 式 (14) および (22)，(23) を適用し，$\sigma = 0$ および式 (24),(25) を用いると，

$$(B + \Delta B)\Delta y - B\Delta y = \epsilon\mu \frac{\partial E}{\partial t}\Delta x \Delta y$$

となる。$\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ の極限で, 次式が成立する。

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \epsilon\mu \frac{\partial E}{\partial t} \tag{26}$$

次に，四辺形 $\overline{PP"Q"QP}$ に沿って Maxwell の第 2 式 (15) を適用し，式 (24),(25) を用いると，

$$E\Delta z - (E + \Delta E)\Delta z = -\frac{\partial B}{\partial t}\Delta x \Delta z$$

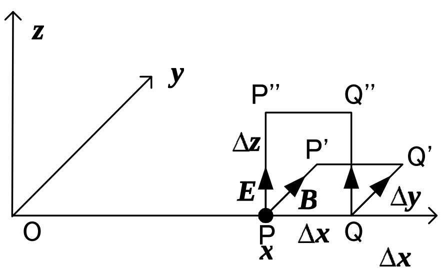

Fig. 5 振動電流による電磁場 (その 2)

となる。$\Delta x \to 0, \Delta z \to 0$ の極限で, 次式が成立する。

$$-\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{27}$$

式 (26), (27) より，B または E を消去して，次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon\mu}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \tag{28}$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon\mu}\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \tag{29}$$

これが電磁波の伝播を表す式であり，式 (1) の波動方程式と同形である。

7　Schrödinger の波動方程式

振動数 ω，波数 k の x 方向へ進行する波動の波動関数 ψ は

$$\psi = Ae^{i(kx-\omega t)} \tag{30}$$

と表される。参考までに，周期，波長，位相速度は次式である。

$$\begin{aligned} T &= 2\pi/\omega & &\text{(周期)} \\ \lambda &= 2\pi/k & &\text{(波長)} \\ c &= \omega/k = \lambda/T & &\text{(位相速度)} \end{aligned}$$

エネルギー E と運動量 p を持つ粒子は，同時に波動の性質を持ち，その振動数と波数は次のアインシュタイン＝ド・ブロイの関係式で表される。

$$E = \hbar\omega \tag{31}$$

$$p = \hbar k \tag{32}$$

この関係式を波動関数 ψ を用いて表すと，

$$E\psi = \hbar\omega\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{33}$$

$$p\psi = \hbar k\psi = -i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{34}$$

となる。つまり，波動関数に対する微分演算子を用いてエネルギーと運動量を表すものとすると，

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{35}$$

$$p \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \tag{36}$$

のように対応づけることができる。

粒子の運動エネルギーは，運動量を用いて表すと $p^2/(2m)$ となるので，ポテンシャルエネルギが $V(x,t)$ と表される保存力場で運動する粒子のエネルギーは次式で表わすことができる。

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x,t) \tag{37}$$

これを波動関数を用いて表すと，次式が得られる。

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\psi + V(x,t)\psi$$

つまり

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x,t)\psi \tag{38}$$

　これを三次元へ拡張すると次式となる。

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(x,y,z,t)\psi \tag{39}$$

ただし，

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

である。式 (39) が（時間を含む） Schrödinger の波動方程式と呼ばれる。

参考文献

[1] 山田伸志 監修, "**振動工学入門**"，パワー社 (1984).

[2] 中村行三, 関谷 荘, "**機械力学**"，いずみ書房 (1961).

[3] 井町 勇 他, "**機械振動学**", 朝倉書店 (1964).

[4] 小野 周, "**岩波講座基礎工学** 1 **力学** (3)", 岩波書店 (1968).

[5] 金原寿郎, "**基礎物理学 下巻**", 掌華房 (1964).