

機械力学講義ノート (力学)

S. Yamauchi

2013年11月15日

目次

1	質点の力学 (1/2)	2
1.1	Newton の運動の法則	2
1.2	床の上の物体	2
1.3	質点に働く力のつりあい	3
1.4	ばねと重り	3
2	質点の力学 (2/2)	6
2.1	座標, 速度, 加速度	6
2.2	ボールの放物運動	6
2.3	エネルギー	7
2.4	衝突	10
3	剛体の力のつりあい	12
3.1	つりあいの条件	12
3.2	例題	12
4	剛体・質点系の運動 (1/2)	16
4.1	てこを介したばねと重り	16
4.2	質点系の運動量定理, 角運動量定理	18
4.3	質点系の運動の分解	18
5	剛体・質点系の運動 (2/2)	19
5.1	幾つかの例題	19

1 質点の力学 (1/2)

1.1 Newton の運動の法則

Newton の運動法則 (「自然哲学の数学的諸原理」1687)

第1法則 『外力によってその状態を変えられない限り、全ての物体は、その静止の状態または直線上の
一様な運動の状態をそのまま続ける』

(慣性の法則；物体に外力が働かない時、物体は静止の状態または等速直線運動を続ける)

第2法則 『運動(質量×速度)の変化は、およぼされる起動力(力×時間)に比例し、その力が及ぼさ
れる直線の方角に行われる』

(運動の法則；物体に外力が働く時、力積に比例して力の方向に運動量が変化する)

第3法則 『作用に対して反作用は常に逆向きで相等しい。または、物体の相互作用は常に相等しく、
逆向きである』(作用反作用の法則)。

1.2 床の上の物体

Fig. 1 のように、床の上に置かれた重りを考える。

問題：重りには重力が働くので、重りは床をある力 F_1 で下向きに押している。一方、床は重りをある力 F_2 で上向きに押している。これは力のつりあいと言えるか？

解答：これは力のつりあいではない。これは2物体間に作用する力の作用と反作用である。

力のつりあいを考えるには、対象とする物体を取り出して(切り出して)考えなければならない。重りに作用する力のつりあいを考えるには、Fig. 1 のように重りを取り出して、重りに作用する重力 mg と、床が重りを上向きに押す力 F_2 を考えなければならない。

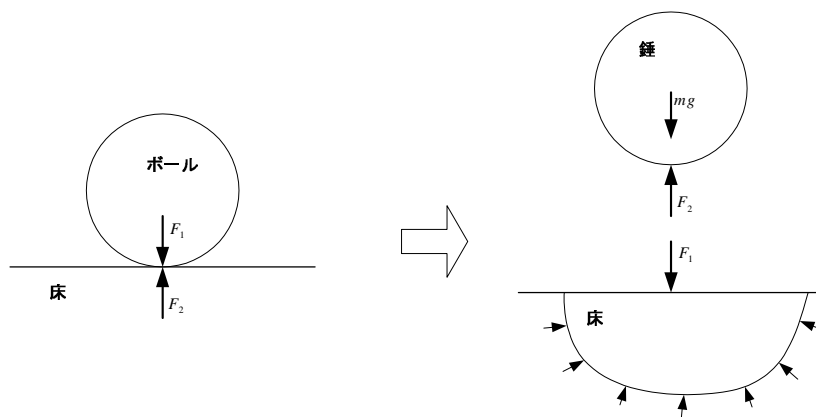


Fig. 1 床の上の重り

重りが静止している場合には、上向きの力を正として

$$-mg + F_2 = 0 \quad (1)$$

が成立する。これが力のつりあいである。

一方、重りが床を押す力はどうなっているであろうか？

重りの周辺の床を適当に切り出して考えると、床材の切り出した表面には部材内の応力が作用しているはずである。重りを置くことにより、この応力が発生し、それらの合力が F_1 とつりあっている筈である。

1.3 質点に働く力のつりあい

静止した物体の一点（質点）に力が働いているとき、次の条件が成り立つ。

- 物体に働く力 (x 方向成分および y 方向成分) がつりあっている。

ここでは、力が $x - y$ 面に平行な場合（2次元問題）だけを対象にして説明するが、必要なら、 z 方向を付け加えればよい。

物体を質点と考えているので、作用する力は全て1点に作用する。この場合は、力がつりあっておれば後述の力のモーメントも必ずつりあっているので、力のモーメントは考える必要はない。

力のつりあいと作用反作用の法則を混同してはならない。

力のつりあい は1つの物体に作用する複数（多数）の外力についてであり、作用反作用 は二つの物体間に作用する一対の（ふたつの）力についてのものである。

1.4 ばねと重り

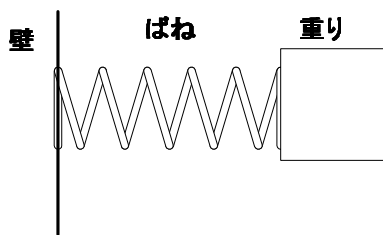


Fig. 2 ばねと重り

Fig. 2 のように、壁に取り付けられたばねと重りを考える。

ばねを手で持って右方向へ少し引いて手を離すと、ばねは振動する。このとき、

- (1) 振動数（または周期）はいくらであろうか？
- (2) どのくらいの時間振動が続くか？
- (3) 壁やばねにはいくらの大きさの力が作用するか？

等々のことを知る必要があるかもしれない。そのためには、ばねと重りに働く力を解析し、重りの運動を求めることが必要となる。

力のつりあい ここでは重力は働いていないと考える。Fig. 2の重りを手で持って、右方向へ少し引っ張る。ばねが伸びて、重りを元の位置へ戻すような力がばねの中に生じて、手の力とつりあって静止する。

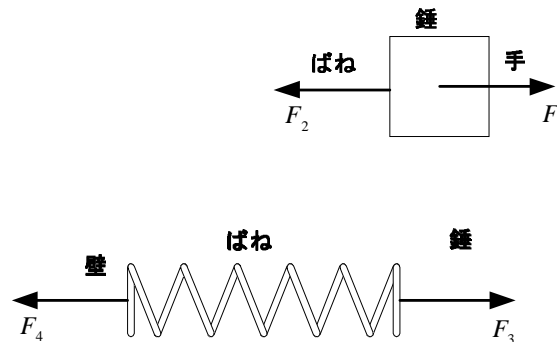


Fig. 3 分解したばねと重り

このとき、重りを手で右へ引く力を F_1 とする。重りには、手から受ける右向きの力 F_1 と、ばねから受ける左向きの力 F_2 が作用する。重りが静止しているならば重りに働く力はつりあっているはずであるから、 $F_1 = F_2$ となっているはずである。

次にばねに働く力を考える。ばねは重りを左向きに F_2 の力で引っ張っているが、同時に重りから右向きにある力 F_3 で引っ張られている。この両者は、作用反作用の関係であるから、 $F_2 = F_3$ となるはずである。一方ばねの左端は壁に取り付けられているから、壁からある力を受けるかもしれない。この力を左向きに F_4 とする。ばねが静止しているならば、ばねに働くこれらの力はつりあっているはずであるから、 $F_3 = F_4$ でなければならない。

さらに、壁はばねを左向きに引っ張っていると同時に、ばねから右向きに引っ張られている。この力は作用反作用の関係であるので、同じ大きさで向きが逆である。壁が動いていないとすると、その壁には(床、天井または周りの壁等から)左向きの他の力が作用して支えられているはずである。

手で重りを右向きに引いた人も重りから左向きに引っ張られている。両足で踏ん張っているとすると、床から右向きの力を受けているはずである。

2つの物体が力を及ぼし合う時には、作用反作用の法則が成り立つ。力のつりあいを考える場合には、対象とする物体を取り出して(step1)、その物体に働く力について考える(step2) が必要である。

重りの運動 重りを手で右方向へ引っ張っている状態で手を離すと、重りはばねに引かれて左方向へ動き出す。この瞬間、重りにはばねからの左向きの力だけが作用しているので、力はつりあっていない。力がつりあっていない場合には、物体は力の合力の方向へ加速度運動する。

右向きを正の方向とすると、重りの運動について次の運動方程式(step3)が成立する。

$$(\text{質量}) \times (\text{加速度}) = -F_2$$

今の場合、重りの加速度は負の値(左向き)である。

質量と速度の積は運動量である。質量は時間的に一定であるので、上の式は次式と同じである。

$$\frac{d}{dt}(\text{運動量}) = (\text{物体に働く外力の和})$$

次にばねの運動について考える。

ばねと重りの間に働く力には作用反作用の関係があるので、ばねが重りを左向きに引く力 F_2 と重りがばねを右向きに引く力 F_3 とは、大きさが等しい。作用反作用の法則は、物体が運動しているか否かに関わらず成立する。

ばねには重りがばねを右向きに引く力 F_3 と、壁がばねを左向きに引く力 F_4 が働いている。ばねは伸縮するためにその重心位置が移動している。物体(質点系)が変形しても、その重心の運動について、上の Newton の法則が成り立つ。従って、ばねの質量が無視できないならば、重りがばねを右向きに引く力 F_3 と壁がばねを左向きに引く力 F_4 とは等しくならない。しかし、ばねの質量が無視できる程度に小さいならば(正確に言うとうと、加速度運動に伴う慣性力が外力 F_3 や F_4 に比べて十分小さいならば)、 F_3 と F_4 とは等しくなる。

物体に働く力のつりあい(静力学)の問題は次の3ステップで解くことができる。

- step 1 対象とする物体を取り出す(切り出す)。
- step 2 対象に働く力を全て描き出す。
- step 3 力のつりあい式(または運動方程式)を立てる。

2 質点の力学 (2/2)

2.1 座標, 速度, 加速度

物体の空間的位置を表すには (x, y, z) 等の座標^{*1} を用いる。時間の経過と共に物体が動けば, 座標 x, y が時間の関数として変化する。

$$x = x(t) \quad (2)$$

$$y = y(t) \quad (3)$$

このとき, 速度 (その x, y 方向成分) v_x, v_y は

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt} \quad (4)$$

$$v_y = \frac{dy(t)}{dt} \quad (5)$$

であり, 加速度 (その x, y 方向成分) a_x, a_y は

$$a_x = \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad (6)$$

$$a_y = \frac{dv_y(t)}{dt} = \frac{d^2y(t)}{dt^2} \quad (7)$$

である。

逆に式 (6) ~ (7) の加速度を積分すれば速度が求まり, 式 (4) ~ (5) の速度を積分すれば位置が求まる。ただし, この場合は, 時刻 $t = 0$ での位置と速度 (初期条件) が与えられていなければならない。

2.2 ボールの放物運動

例題: 初速度 v_0 で鉛直上向きに投げ上げた質量 m のボールの運動を求めよ。ただし, 空気抵抗は無視できるものとする。

この場合は, 鉛直方向 (上向きに y 軸をとる) の運動方程式は次式である。

$$m\ddot{y} = -mg \quad (8)$$

これを 1 回積分すると速度が求まる。

$$\dot{y} = -gt + C_1$$

積分定数 C_1 は, $t = 0$ で $\dot{y} = v_0$ であることから, $C_1 = v_0$ であることが分かる。従って, ボールの速度は次式である。

$$\dot{y} = -gt + C_1$$

さらにもう 1 回積分して,

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + C_2$$

*1 ここでは直交直線座標 (デカルト座標) だけを対象とする。円筒座標, 球座標等の直交曲線座標についての関係が必要であれば, 各自調べよ。

この積分定数 C_2 も, $t = 0$ で $y = 0$ であることより, $C_2 = 0$ であることが分かる。従って,

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t \quad (9)$$

以上においては, 次のことを理解することが重要である。

力学の問題は, 運動方程式 (微分方程式) を立てて, それを初期条件と組み合わせて積分すれば解が得られる。数式で解くことができない場合は, 計算機を用いて数値解を求めればよい。これが力学の基本的な解法であり, 必ず答えが求まる方法 である。

例題: 初速度 v_0 で斜め上方 θ_0 の角度で投げ上げた質量 m のボールの運動を求めよ。空気抵抗は無視できるものとする。

演習課題として各自考えよ。

例題: 初速度 v_0 で斜め上方 θ_0 の角度で投げ上げた質量 m のボールの運動を求めよ。ただし, 速度に比例する空気抵抗が作用するものとする。

この場合は, 抗力 $D = -Cv$ が働く。 $v = (\dot{x}, \dot{y}) = (v \cos \theta, v \sin \theta)$ を用いて, 抗力の x, y 方向成分は次式となる。

$$D_x = -Cv \cos \theta = -C\dot{x}$$

$$D_y = -Cv \sin \theta = -C\dot{y}$$

これを用いると, 運動方程式は次式となる。

$$m\ddot{x} = -C\dot{x} \quad (10)$$

$$m\ddot{y} = -C\dot{y} - mg \quad (11)$$

初期条件は, $t = 0$ で

$$x = 0, \quad y = 0 \quad (12)$$

$$\dot{x} = v_0 \cos \theta_0, \quad \dot{y} = v_0 \sin \theta_0 \quad (13)$$

である。式 (12), (13) の条件を満たす式 (10), (11) の解は次式である。

$$x = \frac{m}{C}v_0 \cos \theta_0 \left(1 - e^{-Ct/m}\right) \quad (14)$$

$$y = \frac{m}{C} \left(v_0 \sin \theta_0 + \frac{mg}{C}\right) \left(1 - e^{-Ct/m}\right) - \frac{mg}{C}t \quad (15)$$

となる (各自, 自分で解いてみよ)。

2.3 エネルギー

力と仕事 質量 m の質点に x 方向に力 F が働いている時, この質点の運動方程式は次式となる。

$$m \frac{dv}{dt} = F$$

これに移動距離 $v dt = dx$ をかけると,

$$mv \frac{dv}{dt} dt = F dx$$

時刻 $t = t_1 \sim t_2$ 間に位置が $x = x_1 \sim x_2$ へ、速度が $v = v_1 \sim v_2$ へ変化したとすると、

$$\frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \int_{x_1}^{x_2} F dx \quad (16)$$

つまり、運動エネルギーの増加量は、この間に力 F のなした仕事量に等しい。

保存力とポテンシャルエネルギー 質量 m の質点に重力が作用しているとする。鉛直上向きに y 軸をとると、運動方程式は、

$$m \frac{dy}{dt} = -mg$$

これに移動距離 $y dt = dy$ をかけて積分すると、 $y \frac{dy}{dt} dt = y dy$ であることを考慮して

$$\frac{1}{2}m\dot{y}^2 = -mgy + \text{const.}$$

つまり、

$$\frac{1}{2}m\dot{y}^2 + mgy = \text{const.} \quad (17)$$

運動エネルギー $\frac{1}{2}m\dot{y}^2$ と重力のポテンシャルエネルギー mgy を合わせた値は一定となる。

質量 m の物体が地球の中心から r の距離離れた位置にあるとき、地球の質量を M 、重力定数を G とする時、物体には

$$F_r = -G \frac{Mm}{r^2}$$

の力 (r の負の方向への力) が作用する。簡単のため、物体は上下方向 (r 方向) にのみ運動するとすると、物体の運動方程式は、

$$m \frac{dr}{dt} = -G \frac{Mm}{r^2}$$

これに移動距離 $r dt = dr$ をかけて積分すると、

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = G \frac{Mm}{r} + \text{const.}$$

つまり、

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 - G \frac{Mm}{r} = \text{const.} \quad (18)$$

となる。この場合の重力ポテンシャルエネルギーは $-G \frac{Mm}{r}$ である。

質量 m の質点がばね定数 k のばねを介して固定されているとする。平衡位置からのばねの変位を x とすると、運動方程式は、

$$m \frac{dx}{dt} = -kx$$

これに移動距離 $x dt = dx$ をかけて積分すると、

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = -\frac{1}{2}kx^2 + \text{const.}$$

つまり、

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{const.} \quad (19)$$

運動エネルギー $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ とばねのポテンシャルエネルギー (歪エネルギー) $\frac{1}{2}kx^2$ を合わせた値は一定となる。

一般に、力 F の成分 (F_x, F_y) が

$$F_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

と表される時、力 F は保存力であると言い、 $\phi(x, y)$ はポテンシャルエネルギーと呼ばれる。このとき、運動方程式は

$$m \frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad (20)$$

$$m \frac{d\dot{y}}{dt} = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \quad (21)$$

となる。これにそれぞれ、 $\dot{x}dt = dx$ および $\dot{y}dt = dy$ を掛けて、両式を加え合わせると、

$$m \left\{ \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dt} dt + \dot{y} \frac{d\dot{y}}{dt} dt \right\} = - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy \right)$$

つまり

$$m \{ \dot{x}(d\dot{x}) + \dot{y}(d\dot{y}) \} = - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy \right)$$

となり、これを積分すると次の関係式が得られる。

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \phi(x, y) = \text{const.} \quad (22)$$

つまり、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和が一定に保たれる(力学的エネルギー保存則)。

固定軸回りの回転 質量 m の質点が固定軸の回りを回転半径 r で回転運動しているとする。回転角を θ とする。質点に回転方向(θ の増加する方向)へ力 F_θ が作用するとすると、 θ 方向の運動方程式は次式となる。

$$m \frac{d(r\dot{\theta})}{dt} = F_\theta$$

これに回転方向の移動距離 $r\dot{\theta}dt = rd\theta$ をかけると、

$$mr^2\dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{dt} dt = rF_\theta d\theta$$

時刻 $t = t_1 \sim t_2$ 間に、回転角が $\theta = \theta_1 \sim \theta_2$ へ、角速度が $\dot{\theta} = \omega = \omega_1 \sim \omega_2$ へ変化したとすると、 $J = mr^2$ (慣性モーメント)、 $T = rF_\theta$ (トルク: 回転軸回りの力のモーメント) と置き直して、

$$\frac{1}{2}J(\omega_2^2 - \omega_1^2) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} T(\theta) d\theta$$

を得る。

つまり、加えた仕事(トルク × 回転角)は回転の運動エネルギー($\frac{1}{2} \times$ 慣性モーメント × 角速度²)の増加量に等しい。剛体は質点が多数集まったものであるから、上のことは固定軸周りの剛体の回転に対しても成立する。

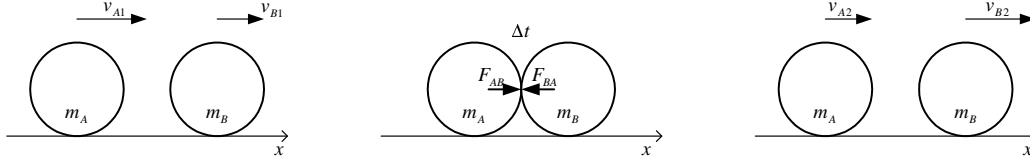


Fig. 4 物体 A, B の衝突

2.4 衝突

摩擦のない軌道上で物体 A が物体 B に追いついて衝突するとする。衝突の比較的短い時間 Δt に互いに大きな力を及ぼし合う。A が B に及ぼす力（右向きを正とする）を F_{AB} 、A が B に及ぼす力を F_{BA} とすると、作用反作用の法則より、 $F_{AB} = -F_{BA}$ である。

衝突前の物体の速度を v_{A1} , v_{B1} 、衝突後の速度を v_{A2} , v_{B2} とすると、運動量定理より次式が成立する。

$$\begin{aligned} m_A(v_{A2} - v_{A1}) &= F_{BA}\Delta t \\ m_B(v_{B2} - v_{B1}) &= F_{AB}\Delta t \end{aligned}$$

これらを加え合わせると、

$$m_A v_{A1} + m_B v_{B1} = m_A v_{A2} + m_B v_{B2} \quad (23)$$

外力が働かないので、A と B を合わせた系で、運動量が保存される。

B に対する A の相対速度 $v_{Ai} - v_{Bi}$ を用いて、反発係数を次式で定義する。

$$e = -\frac{v_{A2} - v_{B2}}{v_{A1} - v_{B1}} \quad (24)$$

式 (23)、(24) より衝突後の速度を求めると、次式となる。

$$v_{A2} = v_G - \frac{em_B}{m_A + m_B} \Delta v_1 \quad (25)$$

$$v_{B2} = v_G + \frac{em_A}{m_A + m_B} \Delta v_1 \quad (26)$$

$$v_G = \frac{m_A v_{A1} + m_B v_{B1}}{m_A + m_B} \quad (27)$$

$$\Delta v_1 = v_{A1} - v_{B1} \quad (28)$$

v_G は重心の速度であり、式 (23) より、衝突の前後で変化しない。

一方、速度エネルギー E_1 , E_2 は、

$$E_1 = \frac{1}{2}(m_A v_{A1}^2 + m_B v_{B1}^2) = \frac{1}{2} \left[(m_A + m_B)v_G^2 + \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} (\Delta v_1)^2 \right] \quad (29)$$

$$E_2 = \frac{1}{2}(m_A v_{A2}^2 + m_B v_{B2}^2) = \frac{1}{2} \left[(m_A + m_B)v_G^2 + e^2 \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} (\Delta v_1)^2 \right] \quad (30)$$

となり、衝突によるエネルギーの減少量は

$$E_1 - E_2 = \frac{1}{2} \left[(1 - e^2) \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} (\Delta v_1)^2 \right] \quad (31)$$

となる。完全弾性衝突 ($e = 1$) では、エネルギーは保存されるが、衝突後同一速度で並進する場合 ($e = 0$) は、最大のエネルギー損失が生じる。熱力学によると、このエネルギー損失は、衝突による物体の塑性変形に伴って、力学的エネルギーが熱エネルギーに変化することに対応している。

3 剛体の力のつりあい

3.1 つりあいの条件

ここでは、力の作用線が全て一つの平面内にある場合 (2次元問題) だけを対象とする。

静止した物体に力が働いてつりあっている時、次の条件が成り立つ。

- 物体に働く力の各成分 (直角な2方向成分) の和がゼロ。
- 任意の点 (面に垂直な軸) 回りの力のモーメントの和がゼロ。

n 個の力 (F_{ix}, F_{iy}) ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) が物体内の位置 (x_i, y_i) に作用してつりあっている時、次式が成り立っている。

$$F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = 0 \quad (35)$$

$$F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = 0 \quad (36)$$

$$(x_1 F_{1y} - y_1 F_{1x}) + \dots + (x_n F_{ny} - y_n F_{nx}) = 0 \quad (37)$$

第3式は原点 (z 軸) 回りの力のモーメントのつりあいを表している。原点を移動しても力のつりあいには影響しないから、力のモーメントのつりあいには、どの点回りのモーメントを用いてもよい。

剛体の力のつりあいを含めて、力学の問題を次のように考えることが大切である。

物体に働く力のつりあい (静力学) の問題は次の3ステップで解くことができる。

step 1 対象とする物体を取り出す (切り出す)。

step 2 対象に働く力を全て描き出す。

step 3 力のつりあい式を立てる。

- x 方向の力のつりあい。
- y 方向の力のつりあい。
- 1点 (軸) 回りの力のモーメントのつりあい

3.2 例題

例題 (偏心した円柱): 重心が ϵ だけ偏心した円柱が水平な床の上に置かれている時、力のつりあいについて説明せよ。

円柱には重心位置に下向きに mg の重力が働く。また、円柱は床を N の力で下向きに押すので、床は同じ N の力で円柱を上向きに押す。円柱には水平方向に力が働いていないので、円柱が静止しているならば、床が円柱に及ぼす水平方向の力はゼロである。

従って、円柱に働く力は、図に示す mg と N だけである。

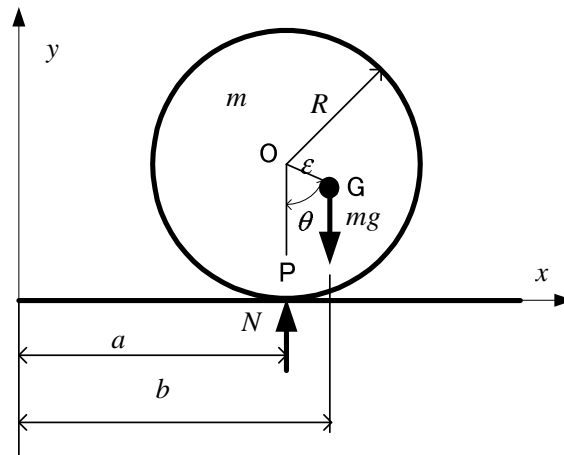


Fig. 5 偏心した円柱

上下方向の力のつり合いから、

$$N - mg = 0 \quad (38)$$

また、原点回りの力のモーメントのつりあいから、

$$a \times N + b \times (-mg) = 0$$

となる。または、円柱と床面の接点まわりの力のモーメントのつりあいから、

$$0 \times N + (b - a) \times (-mg) = 0 \quad (39)$$

となる。

以上より、円柱に働く力がつりあう条件は、

$$\begin{aligned} N &= mg \\ b &= a \quad (\theta = 0 \text{ or } \pi) \end{aligned}$$

つまり、重心が O の真下に来る場合と真上に来る場合の2種類の場合だけである。後者の場合はつりあい位置から少しずれると、ずれが大きくなる方向へ動こうとするため、これは不安定なつりあいである。つりあい状態には安定なつりあいと不安定なつりあいがある。

水平面と α の角度で傾斜した斜面がある。質量 m で半径 R 、重心の偏心量が ϵ である円柱が斜面上で静止する条件を求めよ。

静止しない場合として、(1) 斜面上を転がる場合、(2) 斜面上を滑る場合が考えられる。

例題(円柱を押しして段差を越える): 質量 m 半径 R の円柱状物体の中心高さ位置を水平に押し、高さ h の段差を押し上げたい。必要な力 P を求めよ。ただし、床面は水平面で、重力の加速度を g とする。

円柱中心と段差の角を結ぶ線が鉛直線となす角度を図のように θ とする。必要な力が最大となるのは円柱が床面を離れる時である。このときの角度 θ は次式で表される。

$$\cos \theta = (R - h)/R \quad (40)$$

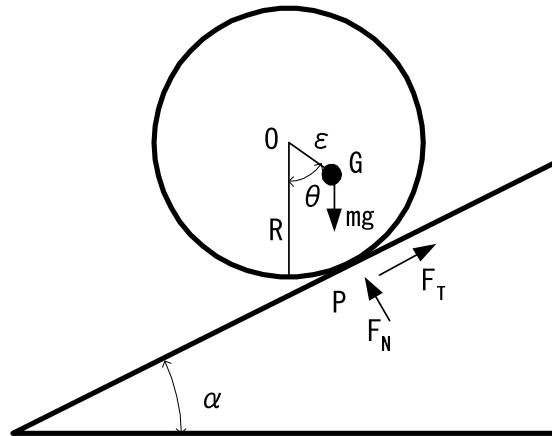


Fig. 6 斜面上の偏心円柱

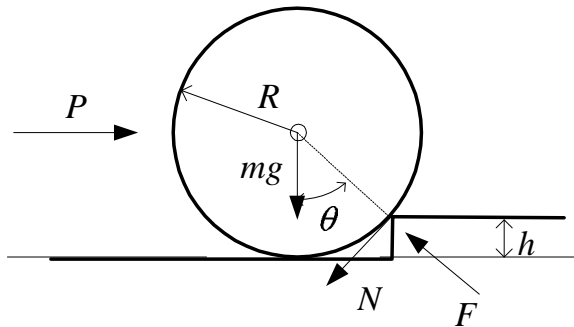


Fig. 7 段差を越える円柱

段差の角が円柱を押し力のうち円柱面に垂直な成分を F ，円柱面に平行な成分を N とする。水平方向，鉛直方向の力のつりあいは次式で表される。

$$P - N \cos \theta - F \sin \theta = 0 \quad (41)$$

$$-N \sin \theta + F \cos \theta - mg = 0 \quad (42)$$

また，円柱の中心回りの力のモーメントのつりあいは次式で表される。

$$RN = 0 \quad (43)$$

式 (41) ~ (43) が力のつりあい式である。

式 (43) より， $N = 0$ 。つまり，円柱の中心を押し場合には，段差の角から摩擦力は働かない。これを式 (41),(42) に用いると，次式となる。

$$P - F \sin \theta = 0 \quad (44)$$

$$F \cos \theta - mg = 0 \quad (45)$$

$$(46)$$

式 (42) , (44) より次式を得る。

$$F = \frac{mg}{\cos \theta} = \frac{mgR}{R-h}$$
$$P = F \sin \theta = mg \tan \theta = mg \frac{\sqrt{(2R-h)h}}{R-h} \quad (h < R)$$

$h \geq R$ では、水平に押したのでは、段差は越えられない。

4 剛体・質点系の運動 (1/2)

4.1 てこを介したばねと重り

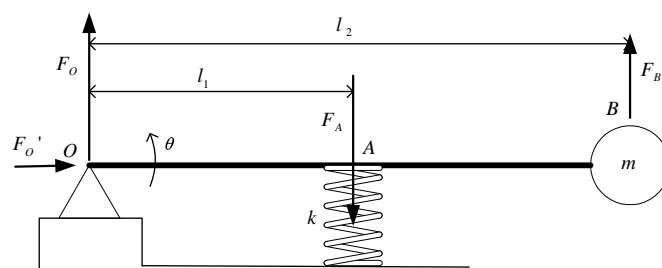


Fig. 8 てこ

Fig. 8 に示すように、長さ l_2 の曲がらないてこの左端 O を回転支持し、右端 B に質量 m の重りを取り付ける。左端より距離 l_1 の位置 A にばねを取り付ける。

右端の重りを F_B の力で上へ (回転の円周方向へ) 持ち上げると、ばねが少し伸びてつりあって静止する。このとき、 A 点および O 点に図のように力が作用する。

力のつりあい てこと重りを一つの物体 (変形しないので剛体) と考えると、この物体に働く水平方向および鉛直方向の力のつりあいから、未知の力 F_O 、 F_O' および F_A の間に次式が成立する。

$$\begin{aligned} F_O' &= 0 \\ F_O - F_A + F_B &= 0 \end{aligned}$$

また、任意点 (例えば O 点) 回りの力のモーメント (反時計回りを正とする) がつりあうことから、次式が成り立つ。

$$-l_1 F_A + l_2 F_B = 0$$

以上の3つの関係式から3つの未知の力 F_O 、 F_O' および F_A が求まる。

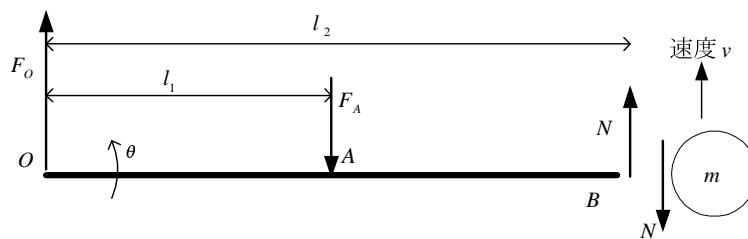


Fig. 9 てこと重りの運動

てこの運動 Fig. 9 のように、てこと重りを分けて考える。重りを手で持ち上げている時、てこは重りを下向きに力 N で引き下げている。重りはてこを上向きに力 N で引き上げている。両者は作用反作用の関係で

あり、大きさが等しく向きが逆である。この力 N は、てこと重りを合わせた元の物体にとっては内力である。

てこの重りを支える手を離すと、てこは点 O を支点に回転して振動する。手を離れた瞬間は、重りを支える手の力が無くなるだけである。

てこの質量を無視すると、てこに働く力のつりあいより次式が成立する。

$$F_O - F_A + N = 0 \quad (47)$$

$$-l_1 F_A + l_2 N = 0 \quad (48)$$

一方、重りの運動に関して次式が成立する。

$$\frac{d(mv)}{dt} = -N$$

速度 v は、重りが上向きの動いている時に正の値とする。

これらより、未知の内力 N を消去すると、次の関係式を得る。

$$F_O - F_A - \frac{d(mv)}{dt} = 0$$

$$-l_1 F_A - l_2 \frac{d(mv)}{dt}$$

または

$$\frac{d(mv)}{dt} = F_O - F_A$$

$$\frac{d(l_2 \times mv)}{dt} = -l_1 F_A$$

ここで、 $l_2 \times mv$ は、運動量に腕の長さを掛けた量であり、角運動量 (運動量のモーメント) である。上の関係を書き直すと、

$$\frac{d}{dt}(\text{運動量}) = (\text{外力の合力}) \quad (49)$$

$$\frac{d}{dt}(\text{角運動量}) = (\text{外力のモーメントの和}) \quad (50)$$

式 (49) は Newton の第 2 法則そのものであり、式 (50) は Newton の第 2 法則を変形したものである。

今考えているてこの運動においては、重りの速度 v は、 $v = d(l_2\theta)/dt$ と表せるので、角運動量は $mv \times l_2 = md(l_2\theta)/dt \times l_2 = ml_2^2 d\theta/dt$ となり、上の角運動量式は次式のように表すこともできる。

$$(l_2^2 m) \frac{d^2\theta}{dt^2} = -l_1 F_A$$

$l_2^2 m$ は、質量に腕の長さの 2 乗を掛けた量であり、 O 点まわりの慣性モーメントである。従って、

$$(\text{慣性モーメント}) \times (\text{角加速度}) = (\text{外力のモーメントの和})$$

と表すこともできる。しかし、この場合は慣性モーメントが変化する場合 (例えば、腕の長さが変化する場合、または光速に近くなって質量が変化する場合) には使えない。

4.2 質点系の運動量定理，角運動量定理

複数の質点（質点系）の運動に対しても，同様に運動量定理と角運動量定理が成り立つ。

質点系（または剛体）の全運動量の時間変化は外力の和に等しい。

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum (\text{運動量}) \right\} = \sum (\text{外力})$$

質点系（または剛体）の全角運動量の時間変化は外力のモーメントの和に等しい。

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum (\text{角運動量}) \right\} = \sum (\text{外力のモーメント})$$

上の式の角運動量（運動量のモーメント）および外力のモーメントは，任意の固定点（例えば原点）を基準とした値である。

4.3 質点系の運動の分解

上の関係式をそのまま質点系に適用すると，複雑になる場合が多い。そこで，質点系または剛体の運動を，重心の並進運動と重心からの相対運動（回転運動等）に分けて考える。このとき，次の関係が成立する（証明略）。

質点系（または剛体）の重心の運動は，重心位置に全質量が集中したとした質点の運動に等しい。

質点系（または剛体）の重心に対する相対運動に対して，固定点回りと同様の角運動量の定理が成り立つ。

$$\frac{d}{dt} (\text{重心に集まった質点の運動量}) = (\text{外力の和})$$

$$\frac{d}{dt} (\text{重心回りの角運動量}) = (\text{重心回りの外力のモーメントの和})$$

剛体の場合は第2式を次のように言い換えることができる。

$$(\text{重心回りの慣性モーメント}) \times (\text{角加速度}) = (\text{重心回りの外力のモーメントの和})$$

ただし，

$$(\text{重心回りの慣性モーメント}) = \sum_i (\text{重心からの距離})^2 m_i = \int_m (\text{重心からの距離})^2 dm$$

上述のことは，重心または固定点以外の点に対しては成り立たないので注意されたし。

	静力学	動力学
重心の x 方向への並進運動	$\sum_i F_{xi} = 0$ ($F_{xi}:F_i$ の x 成分)	$m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum_i F_{xi}$ or $\frac{d(mv_x)}{dt} = \sum_i F_{xi}$ ($v_x = \frac{dx}{dt}$)
重心の y 方向への並進運動	$\sum_i F_{yi} = 0$ ($F_{yi}:F_i$ の y 成分)	$m \frac{d^2y}{dt^2} = \sum_i F_{yi}$ or $\frac{d(mv_y)}{dt} = \sum_i F_{yi}$ ($v_y = \frac{dy}{dt}$)
固定点 (または重心) 回りの 回転運動	$\sum_i M_i = 0$ (M_i :力のモーメント)	$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = \sum_i M_i$ or $\frac{dP}{dt} = \sum_i M_i$ (J :慣性モーメント) (P :角運動量)

Table 1 剛体 (または質点系) のつりあいと運動

5 剛体・質点系の運動 (2/2)

5.1 幾つかの例題

力学の解析手順 力学の解析手順は以下のとおりである。

step 0 (物体の運動を予想する。)

step 1 対象とする物体を取り出す。

step 2 対象に働く力を全て描き出す。

step 3 運動方程式を立てる。

- x 方向の並進運動の式。
- y 方向の並進運動の式。
- 重心回りの回転運動 (角運動量) の式。

step 4 運動方程式を解いて、未知量を求める。

step 5 (運動の予想を検証する)

(例題)

Fig.10 に示すように、長さ $2l$ の棒の両端に質量 m の重りを取り付けた物体を水平な氷の面上に置いている。この一方の重りをハンマーで軽くたたいて、棒と直角方向に v_0 の初速度を与える時、この物体のこの後の運動を求めよ。物体は氷の面上を摩擦なく滑るものとする。

鉄亜鈴の回転

この物体の重心は棒の midpoint である。重心の座標を (x_G, y_G) とし、棒と x 軸のなす角度を θ とする。

重心の並進運動の運動方程式は次式となる。

$$2m \frac{d^2x_G}{dt^2} = 0$$

$$2m \frac{d^2y_G}{dt^2} = 0$$

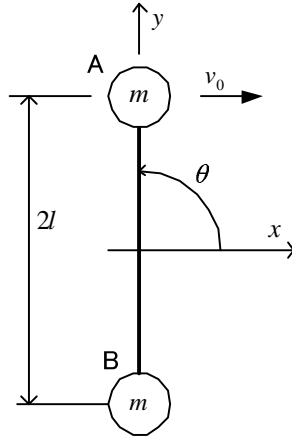


Fig. 10 2 質点の運動

また，重心回りの慣性モーメントは $2ml^2$ であることから，重心回りの回転運動の運動方程式は次式となる。

$$2ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

これらの式を解いて，次式の解を得る。

$$\begin{aligned} x_G &= C_1 t + C_2 \\ y_G &= C_3 t + C_4 \\ \theta &= C_5 t + C_6 \end{aligned}$$

$t = 0$ では

$$\begin{aligned} x_G &= 0 & \frac{dx_G}{dt} &= \frac{1}{2}v_0 \\ y_G &= 0 & \frac{dy_G}{dt} &= 0 \\ \theta &= \pi/2 & \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{v_0}{2l} \end{aligned}$$

である（初期条件）ことから，上の解は次式となる。

$$x_G = \frac{v_0}{2}t \tag{51}$$

$$y_G = 0 \tag{52}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{v_0}{2l}t \tag{53}$$

また，重り A, B の座標は次式となる。

$$x_A = x_G + l \cos \theta = \frac{v_0}{2}t + l \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{v_0}{2l}t \right) \tag{54}$$

$$y_A = y_G + l \sin \theta = l \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{v_0}{2l}t \right) \tag{55}$$

$$x_B = x_G - l \cos \theta = \frac{v_0}{2}t - l \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{v_0}{2l}t \right) \tag{56}$$

$$y_B = y_G - l \sin \theta = -l \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{v_0}{2l}t \right) \tag{57}$$

つまり，この物体は角速度 $v_0/(2l)$ で時計回りに回転しながら， x 軸上を $v_0/2$ の速度で移動することが分かる。重り A, B の動く道筋は，Fig. 11 に示すようなサイクロイド曲線となる。

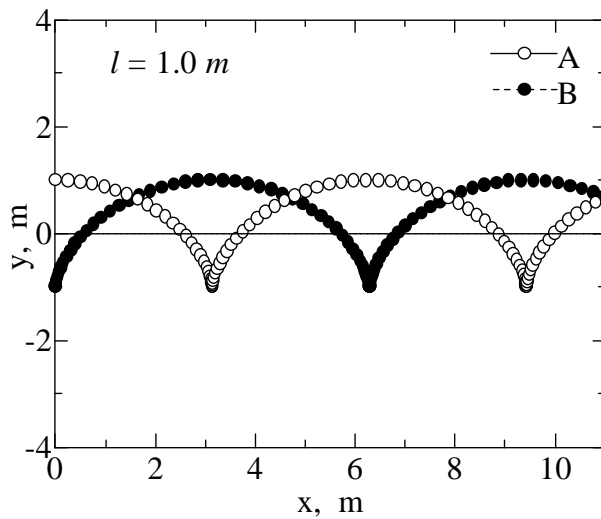


Fig. 11 重り A, B の動く道筋

例題質量 m , 重心回りの慣性モーメント J_G , 半径 R の円柱状物体が高さ h の段差を乗り越えるため
最小の速度 v を求めよ。ただし円柱は段差の角で滑りも跳ね返りもしないものとする (教科書 [2])。

段差を越える円柱

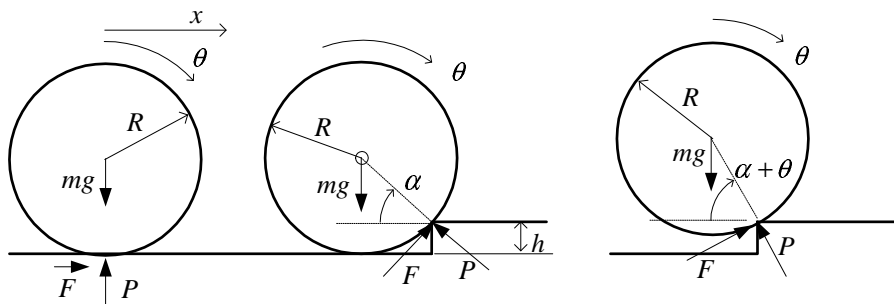


Fig. 12 段差を越える円柱

(1: 段差に当たる前) 円柱には重力 mg と床からの力 P と F が働く。 $y = \text{const.}$, $x = R\theta$ を用いて、運動方程式は次式となる。

$$mR\ddot{\theta} = F \quad (58)$$

$$0 = P - mg \quad (59)$$

$$J_G\ddot{\theta} = -RF \quad (60)$$

式 (59) より、 $P = mg$ となる。式 (58) と (60) より F を消去して、 $(mR^2 + J_G)\ddot{\theta} = 0$ 。つまり、 $\dot{\theta} = v/R = \text{const.}$ (当然、 $F = 0$)

(2: 段差に衝突した瞬間) 微小な時間 Δt 間に円柱に大きな力 P と F が働くとする。円柱の重心と段差角を結ぶ線が水平線となす角度を α , 接触前と後の円柱の角速度を $\dot{\theta}_0$, $\dot{\theta}_1$ とすると、円柱重心の速度成分 (水

平, 鉛直) は $(R\dot{\theta}_0, 0)$ から $(R\dot{\theta}_1 \sin \alpha, R\dot{\theta}_1 \cos \alpha)$ に変化するので, 運動量定理および角運動量定理 (重心回り) より, 次式が得られる。

$$mR\dot{\theta}_1 \sin \alpha - mR\dot{\theta}_0 = (-P \cos \alpha + F \sin \alpha)\Delta t \quad (61)$$

$$mR\dot{\theta}_1 \cos \alpha - mR \times 0 = (P \sin \alpha + F \cos \alpha - mg)\Delta t \quad (62)$$

$$J_G(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_0) = -RF\Delta t \quad (63)$$

ここで, $\Delta t \rightarrow 0$ の極限 (変形しない物体の場合) を考えると, 式 (61) および式 (62) の左辺は有限の値であるから, $F, P \rightarrow \infty$ とならねばならない。一方, 式 (62) の $mg\Delta t \rightarrow 0$ であるので, mg は省略できる。

このとき, 式 (61) と (62) より, $P\Delta t$ を消去して,

$$mR\dot{\theta}_1 - mR\dot{\theta}_0 \sin \alpha = F\Delta t$$

これを式 (63) に用いて, $F\Delta t$ を消去して

$$(J_G + mR^2)\dot{\theta}_1 - (J_G + mR^2 \sin \alpha)\dot{\theta}_0 = 0$$

従って, 衝突直後の角速度 $\dot{\theta}_1$ は次式となる。

$$\dot{\theta}_1 = \frac{J_G + mR^2 \sin \alpha}{J_G + mR^2} \dot{\theta}_0 = \frac{J_G + mR^2 \sin \alpha}{J_G + mR^2} \frac{v}{R} \quad (64)$$

このとき, 力学的エネルギー (運動エネルギー) は保存されないことに注意されたい。衝突の際にエネルギーが保存されるためには, 完全弾性衝突 (反発係数が 1) でなければならない。この場合は, 円柱と段差の角とは衝突後, 一体となって接触したままであるから, 反発係数は 0 であると考えていることになる。この衝突の際には, 円柱と段差角の一部が塑性変形しており, その際に力学的エネルギーの一部が熱エネルギーに変換されているはずである。

(3: 段差の角を中心に回転中) このとき, θ を図のように測ると (剛体の回転角はどの点を中心と考えても同一),

$$\begin{aligned} x &= -R \cos(\alpha + \theta), & y &= R \sin(\alpha + \theta) \\ \dot{x} &= R\dot{\theta} \sin(\alpha + \theta), & \dot{y} &= R\dot{\theta} \cos(\alpha + \theta) \\ \ddot{x} &= R\{\ddot{\theta} \sin(\alpha + \theta) + \dot{\theta}^2 \cos(\alpha + \theta)\}, & \ddot{y} &= R\{\ddot{\theta} \cos(\alpha + \theta) - \dot{\theta}^2 \sin(\alpha + \theta)\} \end{aligned}$$

であるから,

$$mR\{\ddot{\theta} \sin(\alpha + \theta) + \dot{\theta}^2 \cos(\alpha + \theta)\} = -P \cos(\alpha + \theta) + F \sin(\alpha + \theta) \quad (65)$$

$$mR\{\ddot{\theta} \cos(\alpha + \theta) - \dot{\theta}^2 \sin(\alpha + \theta)\} = P \sin(\alpha + \theta) + F \cos(\alpha + \theta) \quad (66)$$

$$(J_G + mR^2)\ddot{\theta} = -mgR \cos(\alpha + \theta) \quad (67)$$

式 (67) を θ について解けば, 解が得られるが, この式は振り子とおなじように, 解析的に解くことはできない。

そこで, 式 (67) の両辺に回転角 $\dot{\theta} dt = d\theta$ を掛けて積分すると (エネルギー積分), 次式が得られる。

$$\frac{1}{2}(J_G + mR^2)\dot{\theta}^2 + mgR \sin(\alpha + \theta) = const. = \frac{1}{2}(J_G + mR^2)\dot{\theta}_1^2 + mgR \sin \alpha$$

これは回転および並進の運動エネルギーと重力のポテンシャルエネルギーの和が一定となるという力学的エネルギー保存則を表している。

これより、 $\dot{\theta}_1$ は次式のように求まる。

$$\dot{\theta}^2 = \frac{(J_G + mR^2)\dot{\theta}_1^2 - 2mgR(1 - \sin \alpha)}{J_G + mR^2}$$

$\alpha + \theta = \pi/2$ の時、 $\dot{\theta} \geq 0$ であるためには (非負の $\dot{\theta}$ が求まるためには) ,

$$\dot{\theta}_1 \geq \sqrt{\frac{2mgR(1 - \sin \alpha)}{J_G + mR^2}} = \sqrt{\frac{2mgh}{J_G + mR^2}}$$

これに (64) を用いて、段差を乗り越えるのに必要な初速度は次式のように求まる。

$$v \geq R \frac{J_G + mR^2}{J_G + mR^2 \sin \alpha} \sqrt{\frac{2mgh}{J_G + mR^2}} = R \frac{\sqrt{2mgh(J_G + mR^2)}}{J_G + mR^2(1 - h/R)}$$

例題 O を中心として回転する剛体 (バット) がある。重心を G とし、OG の延長上の点 M でボールを打撃するとき、回転中心 O に作用する力 (F と N) を求めよ。 $F = 0$ とするためには、ボールをどこで捉えらたらよいか。バットの質量を m , 重心回りの慣性モーメントを J_G , $OG = R$, $GM = r$ とし、ボールが当たった瞬間 (短い時間) , M 点に P の力が作用するものとする [2]。

打撃の中心

図のように θ を選ぶ時、重心の座標は $x = R \cos \theta$, $y = R \sin \theta$ のように変化する。これより、重心の速度

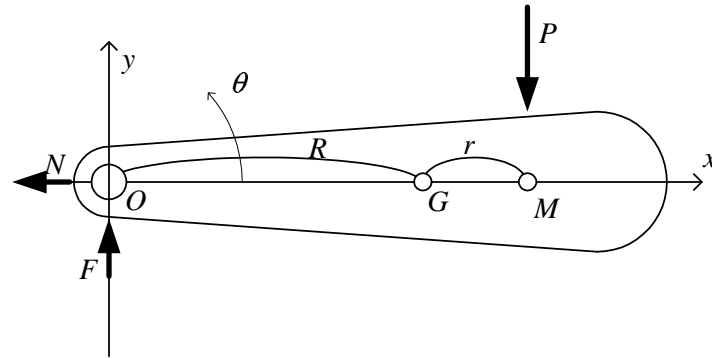


Fig. 13 打撃の中心

および加速度は次式となる。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\dot{\theta}R \sin \theta, & \ddot{x} &= -\ddot{\theta}R \sin \theta - \dot{\theta}^2 R \cos \theta \\ \dot{y} &= \dot{\theta}R \cos \theta, & \ddot{y} &= \ddot{\theta}R \cos \theta - \dot{\theta}^2 R \sin \theta \end{aligned}$$

$\theta = 0$ の瞬間では、

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\dot{\theta}^2 R \\ \ddot{y} &= \ddot{\theta} R \end{aligned}$$

となる。従って、 x, y 方向の並進運動および O 点回りの回転運動の運動方程式は、次式となる。

$$m\ddot{x} = -m\dot{\theta}^2 R = -N \tag{68}$$

$$m\ddot{y} = m\ddot{\theta} R = -P + F \tag{69}$$

$$(J_G + mR^2)\ddot{\theta} = -P(R + r) \tag{70}$$

式 (70) より ,

$$\ddot{\theta} = -\frac{R+r}{J_G + mR^2}P \quad (71)$$

式 (69) より ,

$$F = \frac{J_G - mRr}{J_G + mR^2}P \quad (72)$$

式 (68) より ,

$$N = mR\dot{\theta}^2 \quad (\text{求心力}) \quad (73)$$

式 (72) より , $F = 0$ となる r は次式となる。

$$r = \frac{J_G}{mR} \quad (74)$$

参考文献

- [1] 青木弘, 木谷晋, "工業力学 (「基礎力学」教科書)", 森北出版 (1994).
- [2] 小寺 忠, 矢野澄雄, "演習で学ぶ機械力学 (教科書)", 森北出版 (2005).
- [3] 戸田盛和, "物理入門コース 1 力学", 岩波書店 (1982).
- [4] 戸田盛和, 渡辺慎介, "物理入門コース/演習 1 例題力学演習", 岩波書店 (1990).
- [5] カルマン, ビオ (村上他訳), "工学における数学的方法 上, 下", 法政大学出版局 (1954).