

機械力学講義ノート (1 自由度系)

S. Yamauchi

2011 年 5 月 25 日

目次

6	弾性体の変形とばね定数	3
6.1	棒の引っ張り/圧縮	3
6.2	棒のねじり	3
6.3	はり	5
6.4	コイルばね	7
6.5	ばね定数一覧	10
7	1 自由度系の非減衰自由振動 (1/3)	11
7.1	定数係数線形微分方程式	11
7.2	ばねと質量	11
8	1 自由度系の非減衰自由振動 (2/3)	14
8.1	ねじり振動	14
8.2	振り子	15
9	1 自由度系の非減衰自由振動 (3/3)	17
9.1	変速を含む系	17
9.2	エネルギー法	20
10	1 自由度系の減衰自由振動 (1/2)	23
10.1	速度に比例する抵抗と減衰係数	23
10.2	減衰振動の運動方程式と解	23
11	1 自由度系の減衰自由振動 (2/2)	26
11.1	ダンパの効果	26
11.2	減衰比, 減衰係数の測定	26
12	1 自由度系の強制振動 (1/2)	28
12.1	運動方程式	28
12.2	強制振動の解	28
12.3	複素数を用いた解の表現について	30
12.4	定常振動	31

13 1 自由度系の強制振動 (2/2)	33
13.1 変位による強制振動	33
13.2 振動の伝達	34
13.3 振動測定	35

6 弾性体の変形とばね定数

弾性体に力を加えると、力に比例して変形する。加えた力を F , 変形量を δ とすると、次式の k をばね定数という。

$$F = k\delta \quad (1)$$

物体の変形が回転角 θ で表されるとき、力を力のモーメント M として表して、次式の K をばね定数という。

$$M = K\theta \quad (2)$$

k は N/m 等の単位で表され、 K は Nm/rad 等の単位で表される。

6.1 棒の引っ張り/圧縮

長さ l で、断面積 A の一様な棒に引っ張り力 F を加えたとき、棒を横方向に切断して、その左半分を考える。棒の切断面に一様な応力 σ が働くとする、力のつり合いより

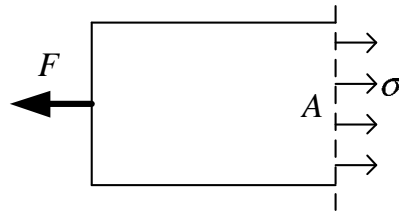


図 1: 引っ張り力と応力

$$F = \sigma A$$

でなければならない。

棒は軸方向歪み ϵ で一様に歪むので、棒の伸びを δ として

$$\epsilon = \delta/l$$

これら、応力と歪との関係式 $\sigma = E\epsilon$ に用いると、

$$\frac{F}{A} = E \frac{\delta}{l}$$

の関係が得られる。これより、

$$k = \frac{F}{\delta} = \frac{EA}{l} \quad (3)$$

を得る。

6.2 棒のねじり

長さ l で、断面積 A の一様な棒に断面一様な棒にねじりモーメント(トルク) M を加えたときの棒のねじれ角を θ とする。棒の各部分は断面形状は変わらずに隣り合う断面間が一様にねじれるとすると、断面の図心を通る軸から r の距離にある円筒面上のせん断歪は

$$\gamma = \frac{r\Delta\theta}{\Delta l} = \frac{r\theta}{l}$$

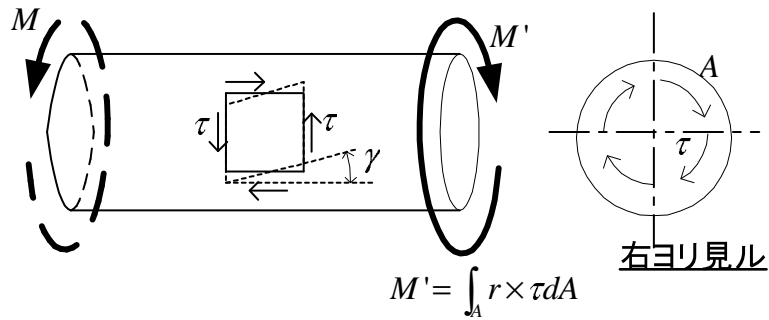


図 2: ねじりモーメントと応力

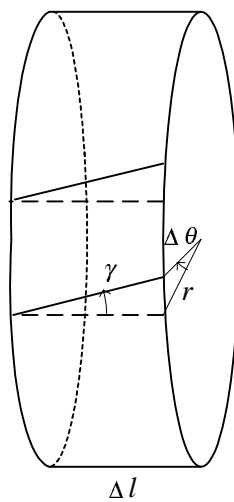


図 3: ねじれ角とせん断変形

となる。

従って、各断面内に生じるせん断応力の分布は、

$$\tau = G\gamma = \frac{G\theta}{l}r$$

となる。このせん断応力による棒軸回りのねじりモーメント $\tau r dA$ を断面全体について積分したものが、外力のねじりモーメントにつらうことから、次式が成立する。

$$M = \int_A \tau r dA = \frac{G\theta}{l} \int_A r^2 dA = \frac{GI_p \theta}{l}$$

これより、

$$K = \frac{M}{\theta} = \frac{GI_p}{l} \tag{4}$$

となる。ただし、

$$I_p = \int_A r^2 dA$$

は、棒断面の図心回りの断面極 2 次モーメントである。

6.3 はり

外力と内力の関係式 はりに作用する分布荷重 $w(x)$ と、それによりはり内に生じるせん断力 $Q(x)$, 曲げモーメント $M(x)$ と関係を求める。

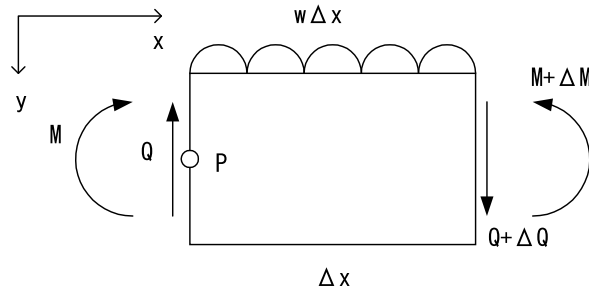


図 4: 梁に生じる内力

はりの長さ Δx の部分を切り出して、そこに働く力を図 4 に示す。軸荷重は作用していないから、水平方向の力のつり合いは考えなくてよい。

鉛直方向の力のつり合いから次の関係が得られる。

$$Q - w\Delta x = Q + \Delta Q$$

従って

$$\frac{\Delta Q}{\Delta x} = -w$$

$\Delta x \rightarrow 0$ の極限では、次式が成立する。

$$\frac{dQ}{dx} = -w \quad (5)$$

また、 P 点回りの力のモーメントのつり合いから次の関係を得る。

$$M + w\Delta x \times \frac{1}{2}\Delta x + (Q + \Delta Q)\Delta x = M + \Delta M$$

従って

$$\frac{\Delta M}{\Delta x} = Q + \Delta Q + \frac{1}{2}w\Delta x$$

$\Delta x \rightarrow 0$ の極限では、次式が成立する。

$$\frac{dM}{dx} = Q \quad (6)$$

変形と応力分布の関係 横荷重を受けるはりには、曲げ変形とせん断変形が生じる。後者のせん断変形は前者の曲げ変形に比べて十分小さく、通常は無視できる。

はりに曲げモーメントが働いて曲げ変形すると、曲げの内側部分が縮み、外側部分が伸び、その中間で伸びも縮みもしない中立面が生じる。変形前の中立面は平面であるとし、変形後の中立面が曲率半径 ρ の円弧（円筒面）状となったとする。変形前に Δx だけ離れて隣接していた 2 断面は、共に傾斜し、互いの傾斜角の差 $\Delta\theta$ は $\Delta\theta = \Delta x/\rho$ となる。

はり断面内で中立曲面より下向き（この場合は曲率の外向き）に座標 η を取ると、 η 位置での伸び歪は、

$$\epsilon = \frac{(\rho + \eta)\Delta\theta - \rho\Delta\theta}{\rho\Delta\theta} = \frac{\eta}{\rho}$$

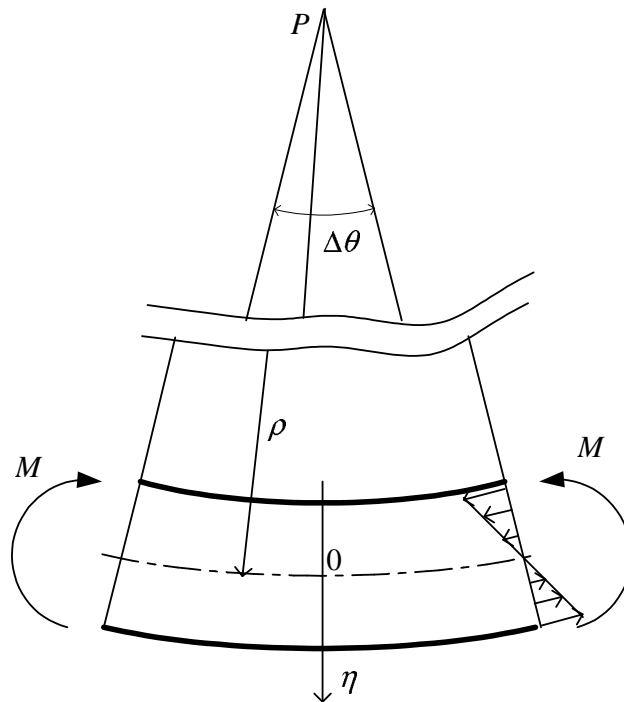


図 5: はりの変形と曲げモーメント

となり，直線状の分布となる。したがって，弾性変形の範囲内であれば応力分布も直線状であり，次式となる。

$$\sigma = \frac{E}{\rho} \eta$$

この応力（内力）分布による曲げモーメント M は，

$$M = \int_A \sigma \eta dA = \frac{E}{\rho} \int_A \eta^2 dA = \frac{EI}{\rho} \quad (7)$$

ただし，

$$I = \int_A \eta^2 dA \quad (8)$$

は断面 A の中立曲線回りの断面 2 次モーメントである。

一方，中立面の曲率 $1/\rho$ ，傾き θ および変位（たわみ曲線） $y(x)$ の間には $dy/dx \ll 1$ と近似できる範囲で，

$$-\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

の関係がある。これを式 (7) に用いると，曲げモーメント M とはりの傾き θ およびたわみ曲線 $y(x)$ に関する次の関係式が得られる。

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\theta}{dx} = -\frac{M}{EI} \quad (9)$$

式 (5)，(6) および (9) を用いることにより，任意形状のはりについて外力による変形を求めることができる。

片持ちはり はり先端 (右端) に集中荷重 F を受ける片持ちはりのせん断力分布 $Q(x)$, 曲げモーメント分布 $M(x)$, たわみ曲線 $y(x)$ は次式となる。

$$\begin{aligned} Q(x) &= F \\ M(x) &= \int_0^x Q(x)dx = F(x-l) \\ y(x) &= -\frac{1}{EI} \int_0^x \int_0^x M(x)dx dx = \frac{F}{EI} \left(\frac{l}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right) \end{aligned}$$

ただし, $M(l) = 0$, $\frac{dy(0)}{dx} = 0$, $y(0) = 0$ を用いている。

はり先端のたわみ量 δ は

$$\delta = y(l) = \frac{Fl^3}{3EI}$$

となることから, ばね定数は

$$k = \frac{F}{\delta} = \frac{3EI}{l^3} \quad (10)$$

となる。

単純はり はり中央に集中荷重 F を受ける両端支持の単純はりのせん断力分布 $Q(x)$, 曲げモーメント分布 $M(x)$, たわみ曲線 $y(x)$ は, はりの左半分部分 ($0 < x < l/2$) に関して次式となる。

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{F}{2} \\ M(x) &= \frac{F}{2}x \\ y(x) &= \frac{Fx}{12EI} \left(\frac{3}{4}l^2 - x^2 \right) \end{aligned}$$

ただし, $M(0) = 0$, $dy(l/2)/dx = 0$, $y(0) = 0$ を用いている。

はり中央のたわみ量は

$$\delta = y(l) = \frac{Fl^3}{48EI}$$

となることから, ばね定数は

$$k = \frac{F}{\delta} = \frac{48EI}{l^3} \quad (11)$$

となる。

6.4 コイルばね

コイルばねの伸び 素線直径 d , コイル半径 R で有効巻き数 n のコイルばね (つる巻きばね) に F の引っ張り加重が加わっているときの, ばねの伸び変形を考えよう。

図 6 に示すように, コイルばねの素線を素線に垂直な一断面で切断して, その上半分の部分に作用する力の釣り合いを考える。

上下方向の力の釣り合い, および切断面中心回りの力のモーメントの釣り合いから, 切断面には, 下向きに F の力および図の反時計回りに $M = FR$ の力のモーメント (ねじりモーメント) が作用していることが分かる。ばね素材は, 力 F により一様なせん断変形をし, ねじりモーメント $M = FR$ によりねじれを伴うせん断変形をするが, 通常のコイルばねでは前者の変形によるばねの伸びは後者による伸びに比べて小さく, 無視できる。

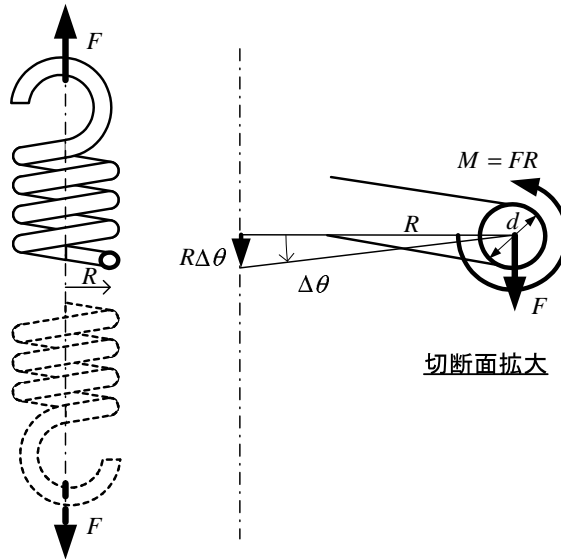


図 6: コイルばねの伸び

円弧状の素線の長さ Δl の微小部分のねじれ角 $\Delta\theta$ は

$$\Delta\theta = \frac{M\Delta l}{GI_p} = \frac{FR\Delta l}{GI_p}$$

である。このねじれにより、その下方部分のばねが回転して移動するが、水平に移動する部分は素線がコイル状に巻かれているため各部分間で相殺され、上下方向の移動だけが残る。素線ねじれ角 $\Delta\theta$ による上下方向の移動量（ばねの伸び） $\Delta\delta$ は

$$\Delta\delta = R\Delta\theta = \frac{FR^2\Delta l}{GI_p}$$

である。これを素線全長について積分すると、ばねの伸びは

$$\delta = \int_0^{2n\pi R} \frac{FR^2}{GI_p} dl = \frac{2n\pi R^3 F}{GI_p} = \frac{64nR^3 F}{Gd^4} = \frac{8nD^3 F}{Gd^4}$$

となる。ただし、ばね素線は円形断面であるとして $I_p = \frac{\pi}{32}d^4$ を用いており、また $D = 2R$ はばねのコイル直径である。

これより、コイルばねの引っ張り（および圧縮）に対するばね定数は次式で表されることが分かる。

$$k = \frac{F}{\delta} = \frac{Gd^4}{8nD^3} \quad (12)$$

コイルばねのねじり 素線直径 d 、コイル半径 R で有効巻き数 n のコイルばねに M のねじりモーメントが加わっているときの、ばねのねじれ角を求めよう。

図 7 に示すように、コイルばねの素線を素線に垂直な一断面で切断して、その上半分の部分に作用する力のつり合いを考えると、素線の各断面には外力と等しい M の曲げモーメント（図の場

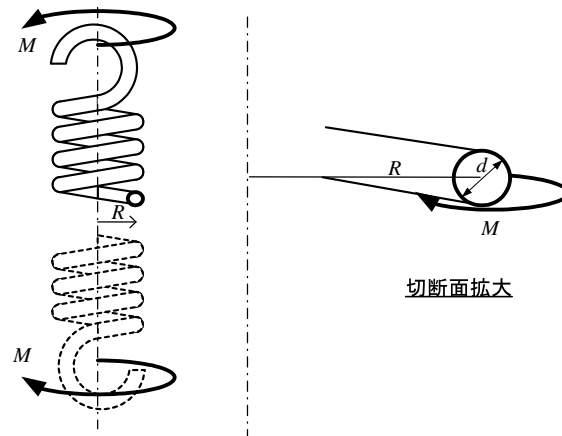


図 7: コイルばねのねじり

合には素線の曲がりを大きくする方向の曲げモーメント) が働くことが分かる。この均一な曲げモーメントによる長さ l の真っ直ぐなはりのたわみ角は、式 (9) より、

$$\theta = -\frac{Ml}{EI}$$

である。コイル状のばね素線の場合では、これはそのままばねのねじれ角となるの、素線長さ $2\pi nR$ のコイルばねのねじれ角として次式が得られる。

$$\theta = \frac{2\pi nRM}{EI} = \frac{64nDM}{Ed^4}$$

ただし、ばね素線は円形断面であるとして $I = \frac{\pi}{64}d^4$ を用いており、 $D = 2R$ はばねのコイル直径である。

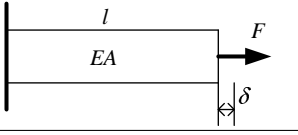
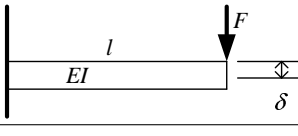
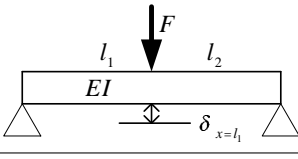
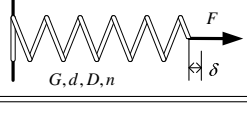
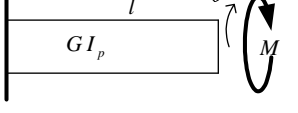
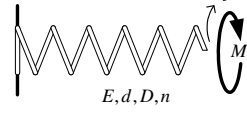
これより、コイルばねのねじりに対するばね定数は次式で表されることが分かる。

$$K = \frac{M}{\theta} = \frac{Ed^4}{64nD} \quad (13)$$

6.5 ばね定数一覧

主なばね定数 k または K を表 1 に示す。

表 1: 各種構造のばね定数

種類	略図	ばね定数
棒の引張/圧縮		$k = \frac{EA}{l}$
片持はり		$k = \frac{3EI}{l^3}$
両端単純支持はり		$k = \frac{3EI}{l_1^2 l_2^2}$
コイルばねの引張/圧縮		$k = \frac{Gd^4}{8nD^3}$
棒のねじり		$K = \frac{GI_p}{l}$
コイルばねのねじり		$K = \frac{Ed^4}{64nD}$

7 1 自由度系の非減衰自由振動 (1/3)

7.1 定数係数線形微分方程式

別紙参照

7.2 ばねと質量

ばね定数 k のばねと質量 m の錘から成る振動系を考える。ばねの質量は錘の質量に比べて十分に小さく無視することが出来るものとする。また、ばねの変形は十分に小さく、力と変形が比例するものとする。

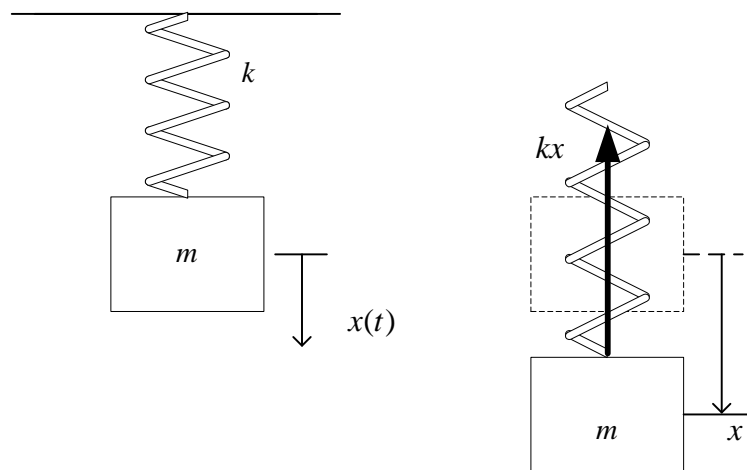


図 8: ばねと質量

運動方程式 錘の中心の上下方向位置を座標とし、平衡位置を基準に下向きを正とする。ある時刻 t に錘が $x(t)$ の位置にあるとき、ばねの伸びも $x(t)$ であるから、錘には上向きに $kx(t)$ の力が作用する ($x(t)$ 負であれば、下向きに作用する)。

一方、錘の速度は $dx(t)/dt$ 、加速度は $d^2x(t)/dt^2$ である (いずれも下向きを正とする) から、Newton の第 2 法則による運動方程式は次式で表される。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

書き直して

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0 \quad (14)$$

また時刻 $t = 0$ での条件 (初期条件) を次式で表す。

$$x = x_0 \quad \text{when } t = 0 \quad (15)$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \quad \text{when } t = 0 \quad (16)$$

式 (14) を式 (15), (16) の条件の下で解けば、錘の運動 $x(t)$ が得られる。この系では、1 個の変数 $x(t)$ で系の挙動が決まるので、1 自由度系という。

力学の問題は加速度が関係するため、一般に2階の微分方程式で表される。2階の微分方程式の一般解は2個の未知定数を含み、2個の初期条件を用いてこれを定めることができる。

解 定数係数の同次線形微分方程式の解 [1] は、

$$x = e^{\lambda t} \quad (17)$$

の形の解を持つ。これを上式に代入して次の関係式を得る。

$$m\lambda^2 + k = 0 \quad (18)$$

この式を式 (14) の特性方程式という。この根 (特性根) は次式となる。

$$\lambda = \pm i\omega_n \quad (19)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (20)$$

従って、一般解は次式となる。

$$\begin{aligned} x &= A_1 e^{i\omega_n t} + A_2 e^{-i\omega_n t} \\ &= (A_1 + A_2) \cos \omega_n t + i(A_1 - A_2) \sin \omega_n t \\ &= C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t \end{aligned} \quad (21)$$

C_1 および C_2 の値は、初期条件から定まる。式 (21) に初期条件 (15), (16) を用いて、

$$\begin{aligned} C_1 &= x_0 \\ C_2 \omega_n &= v_0 \end{aligned}$$

従って、与えられた問題の解は次式となる。

$$x = x_0 \cos \omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t = a \sin(\omega_n t + \phi) \quad (22)$$

$$a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2} \quad (23)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{x_0}{v_0/\omega_n} \quad (24)$$

これは角振動数 ω_n , 初期位相 ϕ , 振幅 a の単振動を表している。

角振動数, 振動数および周期 角振動数が ω_n であるならば, 振動数と周期は次式である。

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (25)$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{1}{f_n} \quad (26)$$

ω_n を固有角振動数, f_n を固有振動数, T_n を固有周期という。角振動数と振動数は角度をラジアンで表すか回転数で表すかの違いであり, 同じ物理量を表している。同じ物理量に対して単位の違いに応じて異なる呼称を用いるのは不合理である。以下では単位の如何にかかわらず振動数と呼ぶことにし, 特に区別する必要がある場合だけ, 角振動数という呼称を用いる。

重力の影響 図 8 において重力を考えると、運動方程式は次式となる。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + mg$$

つまり、

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + k \left(x - \frac{mg}{k} \right) = 0$$

ここで、

$$x' = x - \frac{mg}{k}$$

と置きかえると、

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} + kx' = 0$$

となり、重力を無視した場合に一致する。

つまり、重力によりばねは mg/k だけ余分に伸びて平衡位置が下方へずれる。その新たな平衡位置を原点に選べば、運動方程式は重力を無視した場合と同一となる。一般に、ある一定の外力が振動方向に常に加わっている場合には、平衡位置がずれるだけで、振動の挙動には影響しない。

8 1自由度系の非減衰自由振動 (2/3)

8.1 ねじり振動

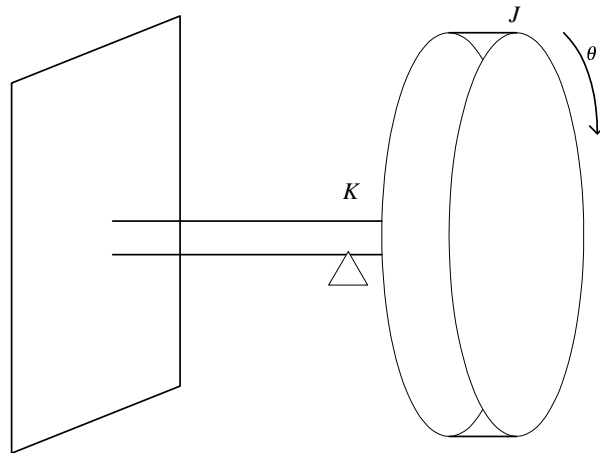


図 9: ねじり振動系

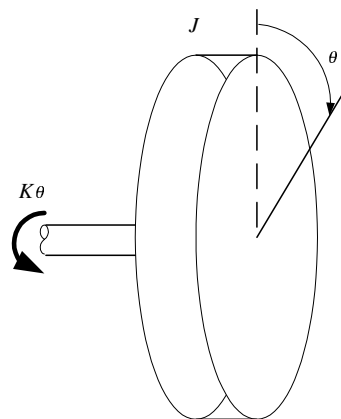


図 10: 円板に働く力のモーメント

図 9 に示すような、ねじり剛性 K の丸棒と慣性モーメント J の円板より構成される系を考える。円板を θ (rad) 回転させて軸をねじるには、 $K\theta$ (N) のトルク (回転のための力のモーメント) が必要である。

図 10 に示すように、ある時刻 t に棒のねじれ角が $\theta(t)$ であるとすると、円板には $K\theta(t)$ の力のモーメントが、 θ の方向とは逆向きに作用する。一方、円板の角速度は $d\theta(t)/dt$ 、角加速度は $d^2\theta(t)/dt^2$ である (いずれも θ と同じ向きを正とする) から、回転運動の運動方程式は次式で表される。

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = -K\theta$$

書きなおして

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + K\theta = 0 \quad (27)$$

この一般解も同様にして，

$$\theta = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t \quad (28)$$

となり，その固有角振動数は次式である。ねじり剛性 K には表 1 の値を用いている。

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}} = \sqrt{\frac{\pi d^4 G}{32 l J}} \quad (29)$$

8.2 振り子

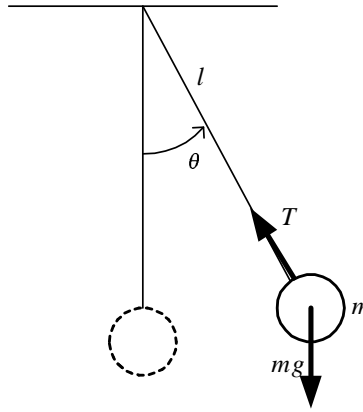


図 11: 単振り子

単振り子 図 11 に示すように長さ l の柔らかい糸で吊るされた単振り子の運動を考える。質量 m の錘は鉛直面内で運動するものとし，糸が鉛直線となす角を θ とする。錘には重力 mg と糸の張力 T が働く。この錘の運動方程式は下式ようになる。

$$l\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0 \quad (30)$$

$\theta \ll 1$ の場合は $\sin \theta \cong \theta$ であるから，

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

と近似できる。これはばね質量系と同一であり，固有角振動数は $\omega_n = \sqrt{g/l}$ であり，解は $\theta = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t$ となる。

剛体振り子 図 12 のように，質量 M の剛体が重心から l 離れた点 O で回転支持されている。このような振り子を剛体振り子という。

この剛体振り子の運動方程式は下式ようになる。

$$\ddot{\theta} + \frac{Mgl}{J} \sin \theta = 0 \quad (31)$$

これは前節と同一形であるから， $\theta \ll 1$ と近似して

$$\ddot{\theta} + \frac{Mgl}{J} \theta = 0$$

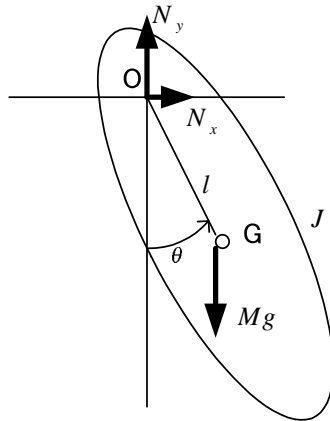


図 12: 剛体振り子

固有角振動数は次式である。

$$\omega_n = \sqrt{\frac{Mgl}{J}} \quad (32)$$

重心を通る軸回りの慣性モーメントを J_G , 重心から距離 l だけ離れた平行な軸回りの慣性モーメントを J とする時, 両者の間に

$$J = J_G + Ml^2$$

の関係がある。

これより, 剛体振り子の固有角振動数は次式となる。

$$\omega_n = \sqrt{\frac{Mgl}{Ml^2 + J_G}} \omega_n = \sqrt{\frac{g/l}{1 + J_G/(Ml^2)}} \quad (33)$$

重心回りの慣性モーメント J_G が Ml^2 に比べて十分小さければ, これは単振り子の結果に一致する。

9 1 自由度系の非減衰自由振動 (3/3)

9.1 変速を含む系

てこ，歯車等により，質点とばねが連結されている場合，質量またはばね定数の影響の仕方が異なってくる。運動方程式を正しく立てて評価することが大切である。

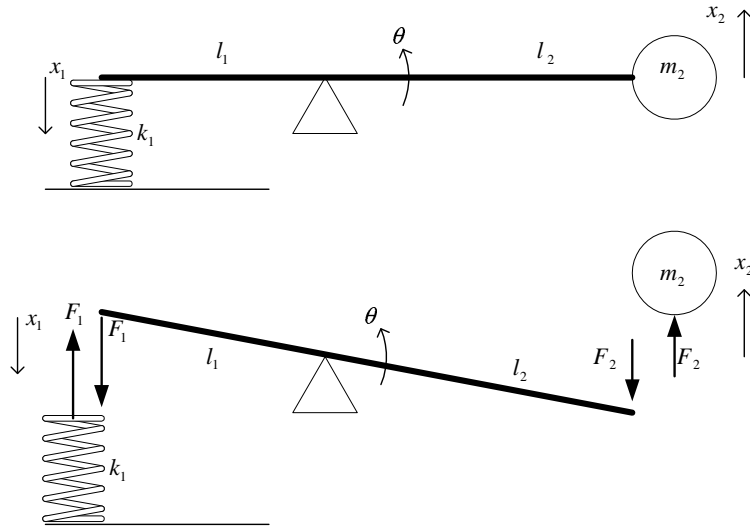


図 13: てこ

てこを含む系 図 13 において，回転角を反時計回りに θ ，てこの両端の変位を 下向き x_1 上向き x_2 とすると， $x_1 = l_1\theta$ ， $x_2 = l_2\theta$ である。以下に 2 種類の方法で運動方程式を導く。

(てこの原理に基づく考え方) 錘が上向きに加速されている時，てこは錘を上向きに押している。この力を F_2 とすると，

$$F_2 = m_2\ddot{x}_2 \quad (34)$$

この時，逆に錘はてこの右端を同じ力 F_2 で下向きに押している (作用反作用)。

てこには，右端に働く下向きの力 F_2 の他に，支点から受ける上向きの力，左端のばねから受ける力が働く。ばねから受ける力を下向きに F_1 であるとすると，支点回りの力のモーメントのつり合い式から

$$F_1l_1 = F_2l_2$$

の関係がある。

また，てこ左端を下向きに引く力は，ばねを上向きに引く力に等しい。これはばねの伸び $-x_1$ とばね定数 k_1 を用いて，次式で表される。

$$F_1 = k_1(-x_1) = -k_1x_1$$

これらより， F_1 および F_2 を消去して，次の関係式を得る。

$$-k_1x_1l_1 = m_2\ddot{x}_2l_2$$

書き直して,

$$m_2 l_2 \ddot{x}_2 + k_1 l_1 x_1 = 0 \quad (35)$$

回転角 θ で表すと次式となる。

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta} + k_1 l_1^2 \theta = 0 \quad (36)$$

(角運動量定理による考え方) 次の角運動量の定理が常に成立する。

$$\frac{d}{dt}(\text{角運動量}) = (\text{力のモーメント})$$

この場合, 支点回りの θ 方向の角運動量, 力のモーメントについて,

$$\frac{d}{dt}(m_2 l_2 \dot{\theta} \times l_2) = -k_1 l_1 \theta \times l_1$$

つまり,

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta} + k_1 l_1^2 \theta = 0 \quad (37)$$

θ の代わりに x_1 または x_2 に注目すると,

$$\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 m_2 x_1 + k_1 x_1 = 0$$

または,

$$m_2 \ddot{\theta} + \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 k_1 \theta = 0$$

と表すことも出来る。

前者の式は, 質量 m_2 をばねの位置に移すには, $(l_2/l_1)^2$ 倍すればよいことを表しており, $(l_2/l_1)^2 m_2$ を等価質量ということもある。後者の式は, ばね定数 k_1 を質量の位置に移すには, $(l_1/l_2)^2$ 倍すればよいことを表しており, $(l_1/l_2)^2 k_1$ を等価ばね定数ということもある。しかし, このような覚え方をしても他への応用はできない。運動方程式を正しく立てることが最も大切である。

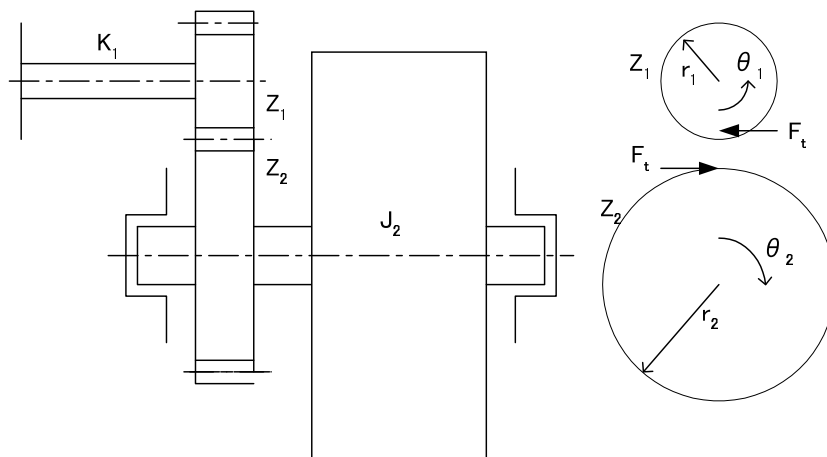


図 14: 歯車

歯車を含む系 歯車で連結された回転軸の捩り振動も同様に扱う事ができる。

図 14 に示すように、捩り剛性 K_1 の軸 1 と慣性モーメント J_2 を有する軸 2 が、歯数 Z_1 と Z_2 の歯車で連結されている場合を例として取り上げる。軸 1 は壁面にまたは充分大きい慣性モーメントを有する物体に強固に固定されている（つまり、一定の角速度で回転する）ものとする。ねじれるのは軸 1 のみであり、軸 2 は全くねじれないものとする。

2 つの歯車（歯車 1 および歯車 2 とする）は歯面で線接触し、互いに押し合う。その力は圧力角により定まる方向へ作用するが、回転運動にはその力の成分のうち、ピッチ円接線方向の成分 F_t のみを考えれば良い。

図 14 の側面図において、歯車 1 は歯車 2 を右方向に F_t の力で押し、また、逆に歯車 2 は歯車 1 を左方向に F_t の力で押ししているとする。歯車 1 から見ると、この力は軸 1 を $-\theta_1$ だけ捩り、

$$F_t r_1 = -K_1 \theta_1$$

となる。また歯車 2 から見ると、この力はフラーホイールの角加速度を生じ、

$$F_t r_2 = J_2 \frac{d^2 \theta_2}{dt^2}$$

これより、 F_t を消去すると次式が得られる。

$$\frac{J_2}{r_2} \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} + \frac{K_1}{r_1} \theta_1 = 0$$

また、回転角 θ 、ピッチ円半径 r および歯数 Z の間には、次に関係がある。

$$\begin{aligned} r_1 \theta_1 &= r_2 \theta_2 \\ \frac{r_1}{Z_1} &= \frac{r_2}{Z_2} \end{aligned}$$

これより、 θ_1 または θ_2 を消去できる。

θ_1 を基準に考えると、

$$\left(\frac{Z_1}{Z_2} \right)^2 J_2 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} + K_1 \theta_1 = 0$$

また、 θ_2 を基準に考えると、

$$J_2 \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} + \left(\frac{Z_2}{Z_1} \right)^2 K_1 \theta_2 = 0$$

と表せる。

並進と回転運動を含む系 図 15 に示すように、半径 r で質量 m 、慣性モーメント J の円柱が水平な床面上に置かれている。円柱の回転軸にばね定数 k のばねを取り付け、ばねが水平になるように他端を壁面に固定している。この円柱が床面を転がりながら左右に動いて振動する系を考えよう。

円柱軸の座標を x 、回転角を θ とする時、両者の間には

$$x = r\theta \tag{38}$$

の関係がある。

円柱に働く力としては、ばねによる力、重力、床面の摩擦力、および床面からの垂直力が作用する。床面からの垂直力と重力とは釣り合っており、円柱の運動には影響しない。

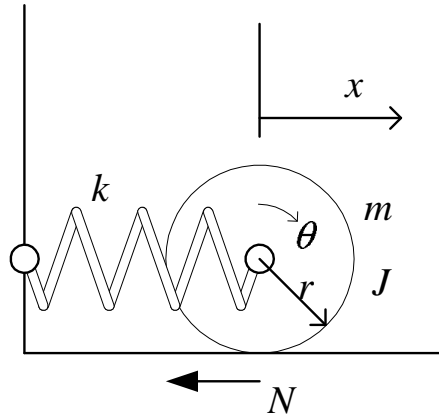


図 15: 転がる円柱

円柱に働く床面の摩擦力を N とする (図の向きを正とする) と, 円柱の並進および回転の運動方程式は次式となる。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - N \quad (39)$$

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = Nr \quad (40)$$

これより, N を消去して,

$$\frac{J}{r} \frac{d^2 \theta}{dt^2} + m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

θ を x で置き換えて,

$$\left(\frac{J}{r^2} + m \right) \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0 \quad (41)$$

この解は

$$x = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t \quad (42)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{J/r^2 + m}} \quad (43)$$

9.2 エネルギー法

減衰のない 1 自由度系の固有振動数を求める簡単な方法を以下に示す。

運動方程式

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

に $dx = \frac{dx}{dt} dt$ を乗じて積分すると,

$$m \int \frac{dx}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2} dt + k \int x \frac{dx}{dt} dt = m \int \frac{dx}{dt} d \left(\frac{dx}{dt} \right) + k \int x dx = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \text{const.}$$

つまり, 運動エネルギーとばねのポテンシャルエネルギーの和は常に一定である (エネルギー保存則)。

$$E_K + E_P = \text{const.} \quad (44)$$

$$E_K = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (45)$$

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2 \quad (46)$$

運動エネルギーがゼロのときポテンシャルエネルギーが最大となり，またポテンシャルエネルギーがゼロのとき運動エネルギーが最大となり，両者の最大値は等しい。

$$(E_K)_{\max} = (E_P)_{\max} \quad (47)$$

ここで，次式の振動を仮定する。

$$x = a \sin \omega_n t \quad (48)$$

この時，

$$E_K = \frac{1}{2}m(a\omega_n \cos \omega_n t)^2$$

$$E_P = \frac{1}{2}k(a \sin \omega_n t)^2$$

式 (47) により，両者の最大値が等しいことより，

$$\frac{1}{2}m(a\omega_n)^2 = \frac{1}{2}ka^2$$

従って，これから固有振動数が求まる。

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (49)$$

てこの例 先のとこの例では，

$$x_1 = a \sin \omega_n t$$

と表すと，

$$x_2 = \frac{l_2}{l_1}x_1 = \frac{l_2}{l_1}a \sin \omega_n t$$

従って，

$$E_K = \frac{1}{2}m_2 \left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2}m_2 \left(\frac{l_2}{l_1}a\omega_n \cos \omega_n t \right)^2$$

$$E_P = \frac{1}{2}k_1 x_1^2 = \frac{1}{2}k_1 (a \sin \omega_n t)^2$$

両者の最大値が等しいことより，

$$\frac{1}{2}m_2 \left(\frac{l_2}{l_1}a\omega_n \right)^2 = \frac{1}{2}k_1 a^2$$

従って固有振動数は次式である。

$$\omega_n = \frac{l_1}{l_2} \sqrt{\frac{k_1}{m_2}} \quad (50)$$

歯車の例 テキストの歯車の例では以下ようになる。

$$\theta_1 = a \sin \omega_n t$$

と表すと、

$$\theta_2 = \frac{Z_1}{Z_2} \theta_1 = \frac{Z_1}{Z_2} a \sin \omega_n t$$

従って、

$$E_K = \frac{1}{2} J_2 \left(\frac{d\theta_2}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} J_2 \left(\frac{Z_1}{Z_2} a \omega_n \cos \omega_n t \right)^2$$
$$E_P = \frac{1}{2} K_1 \theta_1^2 = \frac{1}{2} K_1 (a \sin \omega_n t)^2$$

両者の最大値が等しいことより、

$$\frac{1}{2} J_2 \left(\frac{Z_1}{Z_2} a \omega_n \right)^2 = \frac{1}{2} K_1 a^2$$

従って固有振動数は次式である。

$$\omega_n = \frac{Z_2}{Z_1} \sqrt{\frac{K_1}{J_2}} \quad (51)$$

10 1 自由度系の減衰自由振動 (1/2)

実際の振動ではさまざまな原因により振幅が次第に減少する。その減衰の原因としては以下のようなものがある。

- (1) 空気 (またはその他の流体) の粘性抵抗
- (2) 支点, 可動部等の固体間摩擦
- (3) 変形に伴う内部摩擦 (塑性)
- (4) 減衰器・減衰装置 (ダンパー, ダッシュポット)
- (5) その他

これらはいずれも, 機械的エネルギーが熱エネルギーに変化すること (エネルギーの散逸) に対応する。

10.1 速度に比例する抵抗と減衰係数

抵抗力が次式で表されるダンパ (減衰器) を仮定する。

$$F = -c \frac{dx}{dt} \quad (52)$$

振動の分野では, c を減衰係数と称する。

流体の粘性抵抗であれば, 層流の抵抗に対応する。

一般には, 近似的に

$$F = -A \left| \frac{dx}{dt} \right|^m \quad (\text{速度と逆向き})$$

で表すことができるが, $m = 1$ の場合以外は非線形となるので, 複雑となる。

10.2 減衰振動の運動方程式と解

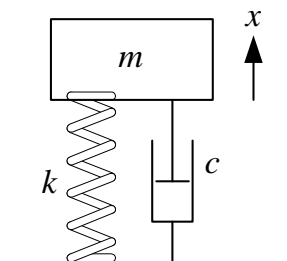


図 16: 減衰を伴う振動系

図 16 の振動系を考える。錘の変位を $x(t)$ とする時, 運動方程式は次式となる。

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -c \frac{dx}{dt} - kx$$

つまり,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (53)$$

または

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dx}{dt} + \omega_n^2 x = 0 \quad (54)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (55)$$

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \quad (56)$$

ζ は減衰係数と後述の臨界減衰係数 $c_{cr} = 2\sqrt{mk}$ の比であり, 減衰比と呼ばれる。

$x = e^{\lambda t}$ の形の解を仮定して代入すると, 特性方程式は次式となる。

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0 \quad (57)$$

この特性根は

$$\lambda = (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n \quad (58)$$

であり, 解は次式となる。

$$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad (59)$$

$$\lambda_1 = (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n \quad (60)$$

$$\lambda_2 = (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n \quad (61)$$

特性根は, 判別式 $\zeta^2 - 1$ の符号, つまり ζ と 1 の大小関係に応じて, 実数または複素数となり, それにより解の性質が大きく異なる。

($\zeta = 1$ の場合: 臨界減衰) この場合は, 特性根は重根で,

$$\lambda = -\omega_n$$

となり, 一般解は次式となる。

$$x = (A_1 + A_2 t)e^{-\omega_n t} \quad (62)$$

$t = 0$ で $x = x_0$, $\dot{x} = 0$ となる解は次式となる。

$$x = x_0(1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t} \quad (63)$$

この時の減衰係数 c を臨界減衰係数 c_{cr} と呼ぶ。 $\zeta = c_{cr}/(2\sqrt{mk}) = 1$ より,

$$c_{cr} = 2\sqrt{mk} \quad (64)$$

($\zeta > 1$ の場合: 過減衰) この場合は, 特性根は共に相異なる実数であり, 解は

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \\ &= C_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \end{aligned} \quad (65)$$

となる。この特性根は共に負である事に注意されたし。

定数 C_1 および C_2 は初期条件 ($t = 0$ での変位と速度) から定まる。

($\zeta < 1$ の場合: 不足減衰) この場合は, 特性根は複素数となり, 解は

$$\begin{aligned}x &= A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \\&= A_1 e^{(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t} + A_2 e^{(-\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t} \\&= e^{-\zeta\omega_n t} \left[A_1 \left(\cos \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + i \sin \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t \right) \right. \\&\quad \left. + A_2 \left(\cos \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t - i \sin \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t \right) \right]\end{aligned}$$

つまり,

$$x = e^{-\zeta\omega_n t} \left(C_1 \cos \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + C_2 \sin \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t \right) \quad (66)$$

$$C_1 = A_1 + A_2 \quad (67)$$

$$C_2 = i(A_1 - A_2) \quad (68)$$

となる。

減衰振動の時の振動数は次式である。

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \quad (69)$$

これを減衰固有振動数という。減衰を伴う場合は, 上式のように減衰のない場合に比べて固有振動数が小さくなる。

11 1自由度系の減衰自由振動 (2/2)

11.1 ダンパの効果

テキスト参照のこと

11.2 減衰比, 減衰係数の測定

減衰係数を理論的に求めることは困難な場合が多い。これを振動波形の測定結果から求める方法を以下に示す。

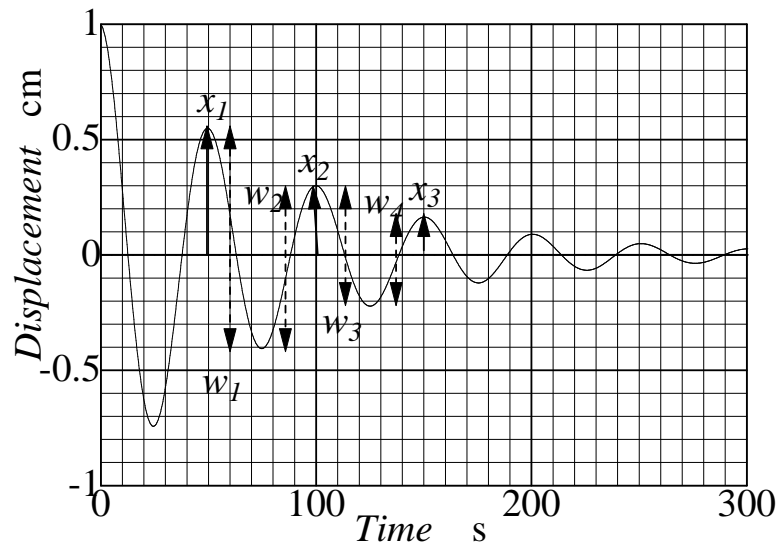


図 17: 減衰係数の測定

振動波形が

$$x = C_1 e^{-\zeta \omega_n t} \cos \omega_d t \quad (70)$$

で表されている場合, $t = 0$ から $T = 2\pi/\omega_d$ 間隔で振幅 x_1, x_2, x_3, \dots を測定すると,

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 \\ x_2 &= C_1 e^{-\zeta \omega_n T} \\ x_3 &= C_1 e^{-\zeta \omega_n 2T} \\ x_4 &= C_1 e^{-\zeta \omega_n 3T} \\ &\dots \end{aligned}$$

つまり,

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_4} = \dots = e^{\zeta \omega_n T} = e^{\Lambda T} \quad (71)$$

となる。この自然対数をとると,

$$\Lambda = \log_e \frac{x_1}{x_2} = \log_e \frac{x_2}{x_3} = \dots$$

$$= \zeta \omega_n T = \zeta \omega_n \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (72)$$

となる。この一周期後の振幅比の対数 Λ を対数減衰率という。

対数減衰率を求める際, x_1, x_2, x_3, \dots を求める時刻は, 振動波形とその包絡線との接点であるが, 減衰の小さい場合には, 近似的に変位の極大値を採用することができる。

また, 振動の平衡位置が読み取りにくい場合は, 振動波形の隣接する極大値と極小値の差

$$\begin{aligned} w_1 &= C_1(1 + e^{-\zeta\omega_n T/2}) \\ w_2 &= C_1(e^{-\zeta\omega_n T} + e^{-\zeta\omega_n T/2}) \\ w_3 &= C_1(e^{-\zeta\omega_n T} + e^{-\zeta\omega_n 3T/2}) \\ w_4 &= C_1(e^{-\zeta\omega_n 2T} + e^{-\zeta\omega_n 3T/2}) \\ &\dots \end{aligned}$$

を用い,

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{w_2}{w_3} = \dots = e^{\zeta\omega_n T/2} \quad (73)$$

とすれば, 半周期後の振幅比が求まる。これより

$$\Lambda = 2 \log_e \frac{w_1}{w_2} = 2 \log_e \frac{w_2}{w_3} = \dots \quad (74)$$

として対数減衰率が求まる。

一般に, m 周期後の振幅比を μ_m (ただし, $\mu_m > 1$) とすると, 対数減衰率は次式より求まる。

$$\Lambda = \frac{1}{m} \log_e \mu_m \quad (75)$$

m の値としては, 大きめに選んだ方が誤差の影響が小さくなるが, 振幅の小さい範囲を用いると振幅測定値の誤差が大きくなる。

上記のように求めた対数減衰率を用いて, 減衰比 ζ は次式より求まる。

$$\zeta = \sqrt{\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + 4\pi^2}} \quad (76)$$

さらに, 振動波形から角振動数 ω_d を求め, また, 質量 m またはばね定数 k のいずれかを測定すれば, 次式より, 非減衰固有振動数 ω_n , 減衰係数 c が求まる。

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (77)$$

$$k = m\omega_n^2 \quad (78)$$

$$c = 2\zeta\sqrt{mk} \quad (79)$$

12 1 自由度系の強制振動 (1/2)

ばねと質量等の振動系に周期的な外力が作用する場合、外力の振動数によっては振動が著しく増幅される場合がある。回転機械では外力が働かなくても、不釣り合い力による振動が生じる。振動が大きくなると機械が壊れる可能性が生じるし、また、その機械の振動が装置全体を振動させて障害を引き起こすこともある。

12.1 運動方程式

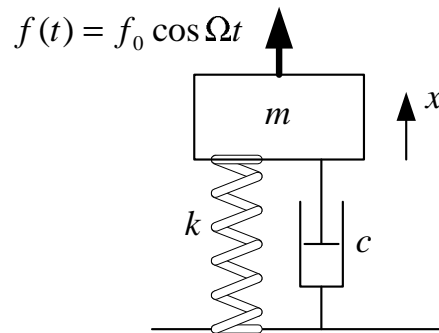


図 18: 外力による強制振動

図 18 に示すように、質量 m に周期的な外力 $f_0 \cos \Omega t$ が作用している場合を考える。
質量 m に作用する力は

$$\begin{aligned} \text{強制力:} & \quad f_0 \cos \Omega t \\ \text{ばねの力:} & \quad -kx \\ \text{減衰器の力:} & \quad -c \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

従って、運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = f_0 \cos \Omega t - kx - c \frac{dx}{dt}$$

つまり、次式となる。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f_0 \cos \Omega t \quad (80)$$

12.2 強制振動の解

一般に、非同次線形微分方程式の解は次の形で表すことができる。

$$(\text{非同次方程式の一般解}) = (\text{随伴同次方程式の一般解}) + (\text{非同次方程式の特解})$$

式 (80) の随伴同次方程式は、 x やその微係数を含まない項を 0 と置いた次式である。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (81)$$

この一般解は次式で与えられる。

$$x = e^{-\zeta\omega_n t} (C_1 \cos \omega_d t + C_2 \sin \omega_d t) \quad (82)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (83)$$

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \quad (84)$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (85)$$

これは減衰を伴う自由振動の解そのものである。

一方、非同次式の特解は1つ求めれば、どれでも良い。特解の一般的な求め方は別紙資料 [1] を参照されたい。

外力が正弦波で表される強制振動の場合、十分な時間経過後、系は外力と同周期で振動すると予想されるので、 a を未知の定数 (時間に依存しない定数) として次の形の特解を仮定する。

$$x = a \cos \Omega t + b \sin \Omega t$$

また、式 (80) の形を見ても、この形の解を持つことが予想できる。

これを式 (80) に代入して、次の関係式を得る。

$$-m\Omega^2(a \cos \Omega t + b \sin \Omega t) + c\Omega(-a \sin \Omega t + b \cos \Omega t) + k(a \cos \Omega t + b \sin \Omega t) = f_0 \cos \Omega t$$

つまり、

$$\begin{aligned} (-m\Omega^2 + k)a + c\Omega b &= f_0 \\ -c\Omega a + (-m\Omega^2 + k)b &= 0 \end{aligned}$$

これより a および b を求めると次式となる。

$$a = \frac{\begin{vmatrix} f_0 & c\Omega \\ 0 & -m\Omega^2 + k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -m\Omega^2 + k & c\Omega \\ -c\Omega & -m\Omega^2 + k \end{vmatrix}} = \frac{f_0(-m\Omega^2 + k)}{(-m\Omega^2 + k)^2 + c^2\Omega^2} \quad (86)$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} -m\Omega^2 + k & f_0 \\ -c\Omega & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -m\Omega^2 + k & c\Omega \\ -c\Omega & -m\Omega^2 + k \end{vmatrix}} = \frac{f_0 c\Omega}{(-m\Omega^2 + k)^2 + c^2\Omega^2} \quad (87)$$

従って、式 (80) の特解は次式で表される。

$$x = f_0 \frac{(-m\Omega^2 + k) \cos \Omega t + c\Omega \sin \Omega t}{(-m\Omega^2 + k)^2 + c^2\Omega^2} = A \cos(\Omega t - \phi) \quad (88)$$

ただし、この特解の振幅 A および位相遅れ ϕ は次式となる。

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(-m\Omega^2 + k)^2 + c^2\Omega^2}} = \frac{f_0/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (89)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{c\Omega}{-m\Omega^2 + k} = \tan^{-1} \frac{2\zeta \frac{\Omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}} \quad (0 < \phi < \pi) \quad (90)$$

ここで f_0/k は外力の振幅荷重 f_0 が静荷重として加わった時の変位である。

式 (80) の一般解は、式 (82) と (88) を次式で表される。

$$x = e^{-\zeta\omega_n t} (C_1 \cos \omega_d t + C_2 \sin \omega_d t) + A \cos(\Omega t - \phi) \quad (91)$$

C_1 および C_2 は任意定数であり、初期条件が与えられると確定する。

12.3 複素数を用いた解の表現について

式 (80) において、右辺の外力を拡張して $f(t) = f_0 e^{i\Omega t} = f_0(\cos \Omega t + i \sin \Omega t)$ と表し、この実部 $f_R(t) = f_0 \cos \Omega t$ が物理的な外力を表すものとする。 f_0 は実数である。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f(t) = f_0 e^{i\Omega t} \quad (92)$$

式 (92) の解 $x(t)$ も一般に複素数となる。これを実部と虚部に分けて $x(t) = x_R(t) + i x_I(t)$ と表すと、

$$m \frac{d^2 x_R}{dt^2} + c \frac{dx_R}{dt} + kx_R + i \left(m \frac{d^2 x_I}{dt^2} + c \frac{dx_I}{dt} + kx_I \right) = f_0 (\cos \Omega t + i \sin \Omega t)$$

つまり

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_R}{dt^2} + c \frac{dx_R}{dt} + kx_R &= f_0 \cos \Omega t \\ m \frac{d^2 x_I}{dt^2} + c \frac{dx_I}{dt} + kx_I &= f_0 \sin \Omega t \end{aligned}$$

となるので、 x の実部 x_R が物理的な解に対応している事がわかる。このように、力 $f(t)$ および変位 $x(t)$ を複素数として表すと、以下のように、両者の位相関係をより簡単に表すことが出来る利点がある。

式 (92) の特解を次の形で表す。

$$x = a e^{i\Omega t} \quad (93)$$

a は一般に複素数であり、

$$x = a e^{i\Omega t} = |a| e^{i(\Omega t + \angle a)} = |a| \{ \cos(\Omega t + \angle a) + i \sin(\Omega t + \angle a) \}$$

となることから、 $|a|$ が振幅を、 $-\angle a$ が位相遅れを表すことが分かる。

式 (93) を式 (92) に代入して、次の関係式を得る。

$$a e^{i\Omega t} (-m\Omega^2 + ic\Omega + k) = f_0 e^{i\Omega t}$$

これより a を求めると次式となる。

$$a = \frac{f_0}{-m\Omega^2 + k + ic\Omega} = \frac{f_0/k}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2} + 2i\zeta \frac{\Omega}{\omega_n}} \quad (94)$$

従って、式 (92) の特解は次式で表される。

$$x = a e^{i\Omega t} = \frac{f_0}{-m\Omega^2 + k + ic\Omega} e^{i\Omega t} = \frac{f_0/k}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2} + 2i\zeta \frac{\Omega}{\omega_n}} e^{i\Omega t} = A e^{i(\Omega t - \phi)} \quad (95)$$

この振幅 A および位相遅れ ϕ は、次式である。

$$A = |a| = \frac{f_0}{\sqrt{(-m\Omega^2 + k)^2 + c^2\Omega^2}} = \frac{f_0/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\phi = -\angle a = \tan^{-1} \frac{c\Omega}{-m\Omega^2 + k} = \tan^{-1} \frac{2\zeta\frac{\Omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}} \quad (0 < \phi < \pi)$$

これは式 (89) および (90) に一致している。

12.4 定常振動

解 (91) の第 1 項は、減衰のある自由振動解であり、 C_1 および C_2 は初期条件から定まる。 t が小さい間は、第 1 項はゼロとはならないため、時間的に振動の様子が変化する。この状態の振動を過渡振動という。

時間が十分に経過する ($t \rightarrow \infty$) と、第 1 項は 0 となるので、第 2 項の特解のみが残り、初期条件によらず振幅一定の振動となる。この状態の振動を定常振動という。

$$x \rightarrow x_s(t) = A \cos(\Omega t - \phi) \quad (96)$$

定常振動の振幅 A および外力に対する位相遅れ ϕ は式 (89) および (90) である。この計算結果を図 19 および 20 に示す。

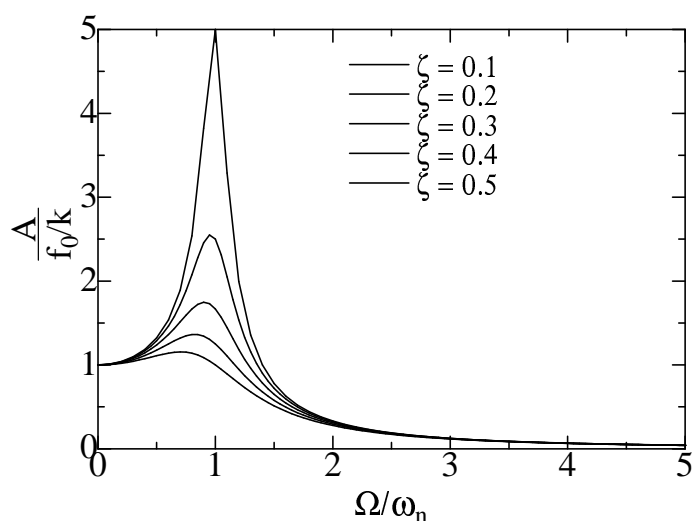


図 19: 共振曲線 (振幅)

これらの図より、以下のことが分かる。

- (1) $\Omega \ll \omega_n$ では、 $x \sim f/k$ (静荷重 f による変位) となり、位相遅れも小さい。
- (2) Ω が ω_n に近づくと、振幅倍率は大きくなる。この現象を共振 (resonance) という。

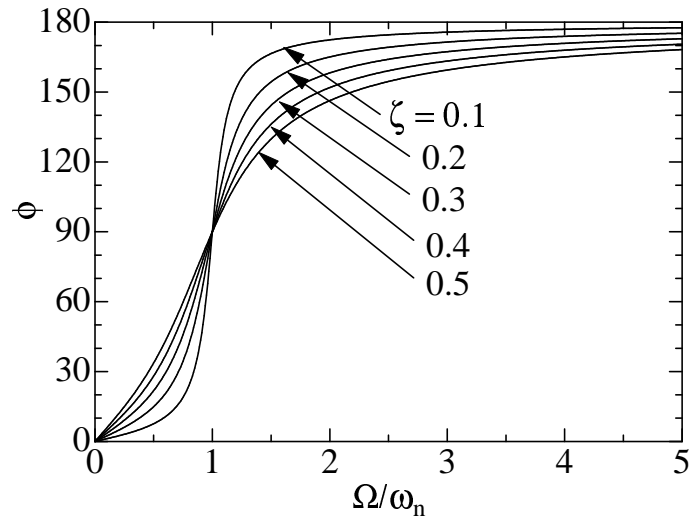


図 20: 共振曲線 (位相)

- (3) $\Omega = \omega_n$ では位相遅れが, $\pi/2 = 90^\circ$ となり, 特に $\zeta = 0$ では, 振幅倍率が無限大となる。
- (4) 共振して振幅が最大となるのは, 式 (89) より, $\Omega = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ ($< \omega_d$) の時である。
- (5) $\Omega \gg \omega_n$ では, 振幅倍率は小さくなり, 0 に近づく。位相遅れは $\pi = 180^\circ$ に近づく。
- (6) ζ が大きくなると, 振幅倍率は小さくなり, $\zeta > 1/\sqrt{2} = 0.7071$ では, 振幅倍率は常に 1 以下となる。

定常振動時に単位時間に外力がなす仕事 \dot{W} は次式で求められる。

$$\dot{W} = f \times \frac{dx}{dt}$$

これに $f = f_0 \cos \Omega t$ および式 (96) を用いると, 次式となる。

$$\dot{W} = -f_0 A \Omega \cos \Omega t \sin(\Omega t - \phi) = -\frac{1}{2} f_0 A \Omega [\sin(2\Omega t - \phi) - \sin \phi]$$

1 周期に渡るこの平均値 $\overline{\dot{W}}$ を考えると, [] 内の第 1 項は 0 となるので,

$$\overline{\dot{W}} = \frac{1}{2} f_0 A \Omega \sin \phi \quad (97)$$

となる。つまり, 外力が単位時間あたりこの振動系に対してなす平均仕事量は上式で与えられる。 $\phi = 0$ および $\phi = \pi = 180^\circ$ の時, この値は 0 であり, 共振時 $\phi = \pi/2 = 90^\circ$ の時最大となることが分かる。定常振動時は, 振動系に供給されたこの仕事量は, ダンパーで消費される (熱エネルギーに変わる) エネルギーに等しいはずである。

13 1 自由度系の強制振動 (2/2)

13.1 変位による強制振動

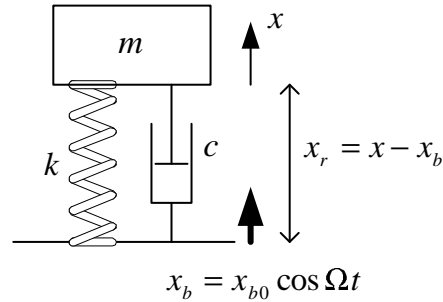


図 21: 変位による強制振動

図 21 に示すように、ばねを支えている基礎自体が

$$x_b = x_{b0} e^{i\Omega t} \quad (98)$$

で与えられるように振動する場合を考える。静止座標に対する質量の変位を x とすると、運動方程式は次式となる。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{d(x - x_b)}{dt} + k(x - x_b) = 0 \quad (99)$$

(相対変位 x_r に関する解) 相対変位 $x_r = x - x_b$ を未知関数と考えて、上式を x_r で表わし、式 (98) を用いると、

$$m \frac{d^2 x_r}{dt^2} + c \frac{dx_r}{dt} + kx_r = -m \frac{d^2 x_b}{dt^2} = m\Omega^2 x_{b0} e^{i\Omega t} \quad (100)$$

f_0 の代わりに $m\Omega^2 x_{b0}$ を用いると、定常振動 (特解) は次式となる。

$$x_r = \frac{m\Omega^2 x_{b0}}{-m\Omega^2 + k + ic\Omega} e^{i\Omega t} = \frac{\frac{\Omega^2}{\omega_n^2} x_{b0} e^{i\Omega t}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2} + 2i\zeta \frac{\Omega}{\omega_n}} = A e^{i(\Omega t - \phi)} \quad (101)$$

相対変位 x_r の振幅と位相遅れは次式となる。

$$A = |x_r| = \frac{\frac{\Omega^2}{\omega_n^2} x_{b0}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (102)$$

$$\phi = -\angle(x_r/x_b) = \tan^{-1} \frac{2\zeta \frac{\Omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}} \quad (103)$$

振幅 A を図 22 に示す。位相遅れ ϕ は図 20 に同じである。

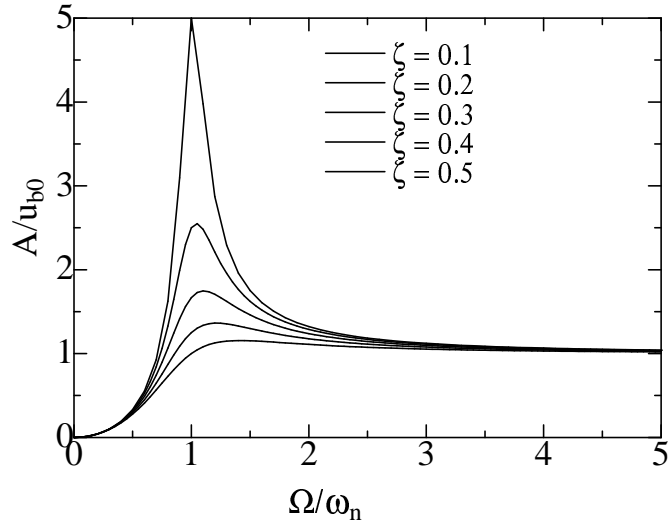


図 22: 共振曲線 (変位による強制振動)

(絶対変位 x に関する解) 質量の絶対変位 x を未知関数と考えると,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = c \frac{dx_b}{dt} + kx_b = (k + ic\Omega)x_{b0}e^{i\Omega t} \quad (104)$$

定常振動 (特解) は次式となる。

$$x = \frac{k + ic\Omega}{-m\Omega^2 + k + ic\Omega} x_{b0}e^{i\Omega t} = \frac{1 + 2i\zeta \frac{\Omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2} + 2i\zeta \frac{\Omega}{\omega_n}} x_{b0}e^{i\Omega t} = A_m e^{i(\Omega t - \phi_m)} \quad (105)$$

x の振幅と位相遅れは次式となる。

$$A_m = |x| = x_{b0} \sqrt{\frac{1 + \left(2\zeta \frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (106)$$

$$\phi_m = -\angle(x/x_b) = \tan^{-1} \frac{2\zeta \frac{\Omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}} - \tan^{-1} 2\zeta \frac{\Omega}{\omega_n} \quad (107)$$

13.2 振動の伝達

(質量から基礎への外力の伝達) 質量に外力が作用するときの定常振動は, 式 (96) である。基礎にはばねおよびダッシュポットを介して次式の力が作用する。

$$f_T = kx + c \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{k + ic\Omega}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2} + 2i\zeta\frac{\Omega}{\omega_n}} \frac{f_0}{k} e^{i\Omega t} = \frac{1 + 2i\zeta\frac{\Omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2} + 2i\zeta\frac{\Omega}{\omega_n}} f_0 e^{i\Omega t} \quad (108)$$

従って

$$\frac{f_T}{f} = \frac{1 + 2i\zeta\frac{\Omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2} + 2i\zeta\frac{\Omega}{\omega_n}} \quad (109)$$

(基礎から質量への変位の伝達) 基礎が振動するときの質量の変位は、式 (105) である。従って

$$\frac{x}{x_b} = \frac{1 + 2i\zeta\frac{\Omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2} + 2i\zeta\frac{\Omega}{\omega_n}} \quad (110)$$

これは f_T/f に同じである。

式 (109) 及び (110) による値を図 23 に示す。

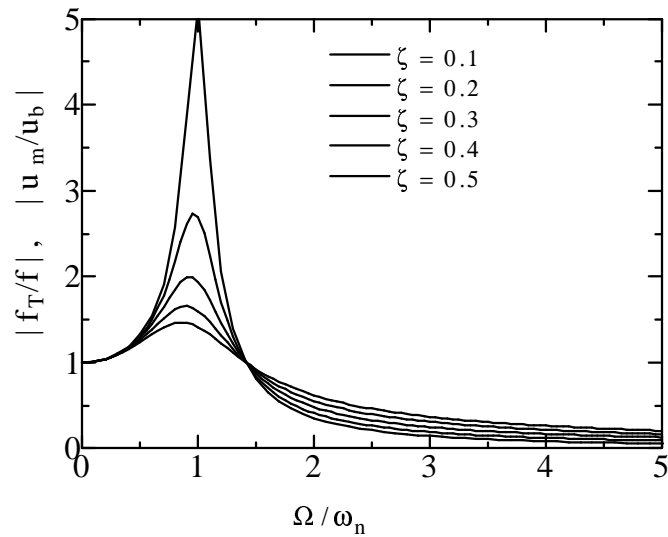


図 23: 力と変位の伝達率

13.3 振動測定

振動計では、基礎（または基礎と共に運動する測定器）と質量との相対変位 x_r を計測する。相対変位は式 (101) で与えられる。

$$x_r = \frac{\frac{\Omega^2}{\omega_n^2}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2} + 2i\zeta\frac{\Omega}{\omega_n}} x_{b0} e^{i\Omega t}$$

ここで， $\Omega/\omega_n \rightarrow \infty$ の時，

$$x_r \rightarrow -x_{b0}e^{i\Omega t} = -x_b \quad (111)$$

となり，基礎の変位を測定することができる。これが変位形振動計の原理である。

また， $\Omega/\omega_n \rightarrow 0$ の時は，

$$x_r \rightarrow \frac{\Omega^2}{\omega_n^2} x_{b0} e^{i\Omega t} = -\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 x_b}{dt^2} \quad (112)$$

となり，基礎の加速度に比例した信号を取り出すことができる。これが加速度形振動計の原理である。

参考文献

- [1] S. Yamauchi, "定数係数線形微分方程式", 機械力学参考資料.
- [2] 戸田盛和, "物理入門コース 1 力学", 岩波書店 (1982).
- [3] カルマン, ピオ (村上勇次郎 他訳), "工学における数学的方法 上", 法政大学出版局 (1954).
- [4] 小野 周, "岩波講座基礎工学 1 力学 (3)", 岩波書店 (1968).
- [5] 青木弘, 木谷晋, "工業力学", 森北出版 (1994).
- [6] 近藤泰郎, 小林邦夫, "よくわかる機械力学", オーム社 (1995).