

機械力学講義ノート (2自由度系の振動)

S. Yamauchi

2013 年 12 月 29 日

この章では 2 自由度振動系の解析方法とその特性について学ぶ。対象は自由振動，強制振動であり，簡単のために粘性等による減衰を無視して取り扱う。

ここでの力学系は 1 自由度系に比べてやや複雑となるので，このような場合に便利な Lagrange の運動方程式についても解説する。

目次

| | |
|-----------------------------|------------|
| 14 Lagrange の運動方程式 | 201 |
| 14.1 一般化座標と Lagrange の運動方程式 | 201 |
| 14.2 適用例 (単振り) | 202 |
| 14.3 適用例 (半円柱の振動) | 202 |
| 15 2 自由度系の自由振動 (1/3) | 205 |
| 15.1 簡単な例 | 205 |
| 16 2 自由度系の自由振動 (2/3) | 208 |
| 16.1 二重振り | 208 |
| 16.2 2 個の重りとばね | 211 |
| 16.3 ばねで支えた剛体の上下・回転の振動 | 212 |
| 16.4 ばねで結合した 3 個の重りの並進と振動 | 214 |
| 17 2 自由度系の自由振動 (3/3) | 216 |
| 17.1 一般の 2 自由度系非減衰自由振動 | 216 |
| 18 2 自由度系の強制振動 (1/2) | 219 |
| 18.1 3 個のばねで結合した 2 個の重り | 219 |
| 18.2 2 個のばねで結合した 2 個の重り | 220 |
| 19 2 自由度系の強制振動 (2/2) | 222 |
| 19.1 動吸振器 | 222 |
| 19.2 変位による強制振動 | 222 |
| 19.3 回転する不釣り合い力による強制振動 | 222 |

14 Lagrange の運動方程式

14.1 一般化座標と Lagrange の運動方程式

ある力学系の配置 (位置) を表すのに n 個の座標 $(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$ が必要である時、 n は系の自由度と呼ばれる。1 個の質点の自由度は 3 であり、距離が一定に保持された 2 質点の自由度は 5 である。1 個の剛体の自由度は 6 (重心の位置が 3、重心を通る軸回りの回転角が 3) である。平面上を転がる円柱の自由度は 1 (例えば、円柱の回転角) である。

このような座標 q_i を一般化座標という。

系の運動エネルギーを一般化座標とその時間微分 (一般化速度) を用いて

$$T = T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, q_1, q_2, \dots, q_n)$$

と表す時、運動方程式は次式で表すことができる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

式 (1) を Lagrange の運動方程式という。この誘導等は、適当な参考書を見られたい。

Q_i は、物体に働く力の q_i 方向成分と考えられるが、力の成分そのものではなく、 Q_i と一般化座標の増分 dq_i との積 $Q_i dq_i$ がその力のなす仕事 dW となるような物理量であり、一般化力と呼ばれる。

$$dW = \sum_{i=1}^n Q_i dq_i$$

例えば、 dq_i がある曲線に沿う長さの場合には、 Q_i はその接線方向の力であり、 dq_i がある軸回りの回転角である場合には、 Q_i はその軸回りの力のモーメントである。 Q_i を求めるには、一般化座標の変化に対して仕事をしない外力 (拘束力など) をあらかじめ除いておくことが大切である。

Q_i またはその一部が、保存力である場合は、ポテンシャルエネルギー $U(q_1, q_2, \dots, q_n)$ が存在して、

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

と表すことができる。従って、次式が得られる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q'_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

ただし、 Q'_i は保存力以外の一般化力である。

Table 1: 一般化座標と一般化力

| | 一般化座標 q | 一般化速度 \dot{q} | 一般化力 Q | 備考 $W = Q dq$ |
|------|--------------|--------------------|-------------|------------------|
| 並進運動 | 長さ x | 速度 \dot{x} | 力 F | $W = F dx$ |
| 回転運動 | 角度 θ | 角速度 $\dot{\theta}$ | 力のモーメント M | $W = M d\theta$ |

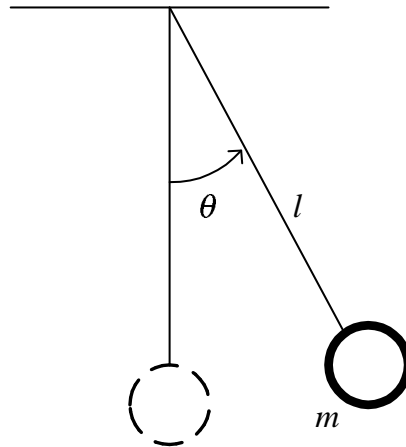


Fig. 1: 単振り子

14.2 適用例 (単振り子)

上記の方法を適用して, Fig. 1 に示す単振り子の運動を考える。これは 1 自由度の運動であり, 一般化座標として θ を選ぶ。この時, この振動系の運動エネルギーおよび重力によるポテンシャルエネルギーは次式となる。

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 \\ U &= mgl(1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

これより,

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= ml^2\dot{\theta} & \frac{\partial T}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} &= mgl \sin \theta & Q_{\theta} &= 0 \end{aligned}$$

これを Lagrange の運動方程式に用いて,

$$\frac{d}{dt} (ml^2\dot{\theta}) - 0 + mgl \sin \theta = 0$$

整理して

$$l\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$$

これが運動方程式であり, Newton の運動方程式 (第 2 法則) を用いた結果と同じである。

14.3 適用例 (半円柱の振動)

水平面上で滑らずに転がって振動する半径 R 、質量 m の半円柱の運動を調べる。半円柱の重心位置 r_G と重心まわりの慣性モーメント J は次式である。

$$r_G = \frac{4}{3\pi}R \quad (3)$$

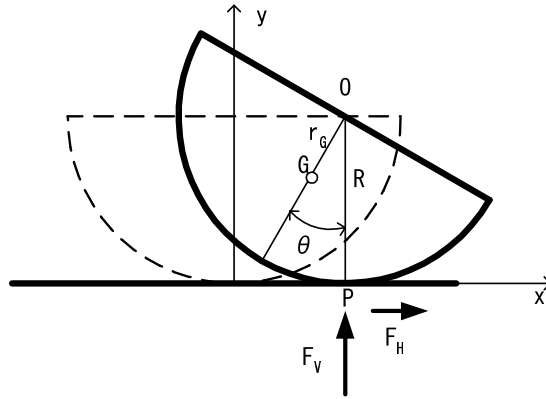


Fig. 2: 半円柱の振動

$$J = J_0 - r_G^2 m = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi} \right) R^2 m \quad (4)$$

平衡位置からの円柱の回転角を θ とすると、重心の座標は次式である。

$$x = R\theta - r_G \sin \theta \quad (5)$$

$$y = R - r_G \cos \theta \quad (6)$$

Newton の運動方程式による誘導: 重心の並進運動, 重心回りの回転運動に関する運動方程式は次式である。

$$m\ddot{x} = F_H$$

$$m\ddot{y} = F_V - mg$$

$$J\ddot{\theta} = -F_V r_G \sin \theta - F_H (R - r_G \cos \theta)$$

F_H および F_V は床面からの水平および垂直反力である。上式からこれらを消去すると, 次式を得る。

$$J\ddot{\theta} + (m\ddot{y} + mg)r_G \sin \theta + m\ddot{x}(R - r_G \cos \theta) = 0$$

これに式 (5) および (6) を用いて, x, y を θ で表すと,

$$J\ddot{\theta} + mr_G^2 \sin \theta (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) + mgr_G \sin \theta + m(R - r_G \cos \theta)^2 \ddot{\theta} + m(R - r_G \cos \theta) \dot{\theta}^2 \sin \theta = 0$$

整理して,

$$(J + mR^2 + mr_G^2 - 2mRr_G \cos \theta) \ddot{\theta} + mRr_G \dot{\theta}^2 \sin \theta + mr_G g \sin \theta = 0$$

これに, 式 (3) および (4) の r_G および J を用いると, 次式となる。

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi} \cos \theta \right) \ddot{\theta} + \frac{4}{3\pi} \dot{\theta}^2 \sin \theta + \frac{4}{3\pi} \frac{g}{R} \sin \theta = 0 \quad (7)$$

Lagrange の運動方程式による誘導： 運動エネルギーおよび重力のポテンシャルエネルギーは次式で表される。

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \\
 &= \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 [(R - r_G \cos \theta)^2 + r_G^2 \sin^2 \theta] + \frac{1}{2}(J_0 - r_G^2 m)\dot{\theta}^2 \\
 &= \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 (R^2 - 2Rr_G \cos \theta + r_G^2) + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 \left(\frac{1}{2}R^2 - r_G^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 \left(\frac{3}{2}R^2 - 2Rr_G \cos \theta \right) \\
 U &= mgy = mg(R - r_G \cos \theta)
 \end{aligned}$$

これを Lagrange の運動方程式に用いて次式を得る。

$$\frac{d}{dt} \left[m\dot{\theta} \left(\frac{3}{2}R^2 - 2Rr_G \cos \theta \right) \right] - \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 2Rr_G \sin \theta + mgr_G \sin \theta = 0$$

整理して

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi} \cos \theta \right) \ddot{\theta} + \frac{4}{3\pi} \dot{\theta}^2 \sin \theta + \frac{4}{3\pi} \frac{g}{R} \sin \theta = 0$$

これが運動方程式であり，Newton の運動方程式を用いた結果 (7) と同じである。

$\theta \ll 1$ の場合には次式のように近似できる。

$$\ddot{\theta} + \frac{8}{9\pi - 16} \frac{g}{R} \theta = \ddot{\theta} + 0.6518 \frac{g}{R} \theta = 0$$

つまり，固有振動数は

$$\omega = \sqrt{\frac{0.6518g}{R}}$$

となる。

15 2自由度系の自由振動 (1/3)

2自由度系に必要な解を求める手順は以下のようになる。

STEP 1: 運動方程式を導く

STEP 2: 固有振動数を求める

STEP 3: 固有振動モードを求める

以下に具体例を示す。

15.1 簡単な例

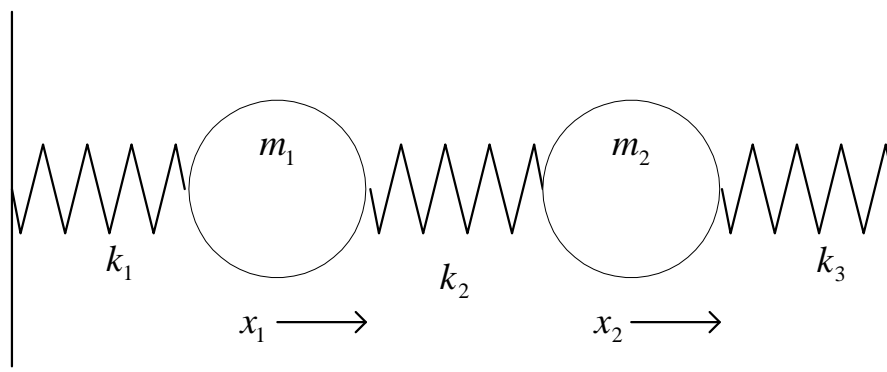


Fig. 3: 3個のばねで結合した2個の重り

Fig. 3 に示す 2 重り, 3 ばねより成る系を考える。ここでは, 簡単のために $m_1 = m_2 = m$ および $k_1 = k_2 = k_3 = k$ の場合を考える。

STEP 1a: 運動方程式を導く (Newton の方法) 各重りに働く力のつりあいより, 運動方程式は次式で与えられる。

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1) - kx_2$$

整理して次式となる。

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} + 2kx_1 - kx_2 = 0 \quad (8)$$

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} - kx_1 + 2kx_2 = 0 \quad (9)$$

STEP 1b: 運動方程式を導く (Lagrange の方法) 運動エネルギー T および重力によるポテンシャルエネルギー U は次式である。

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)$$

$$U = \frac{k}{2} \{x_1^2 + (x_2 - x_1)^2 + x_2^2\}$$

これを Lagrange の運動方程式に用いて、次式を得る。

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 - 0 + 2kx_1 - kx_2 &= 0 \\ m\ddot{x}_2 - 0 - kx_1 + 2kx_2 &= 0 \end{aligned}$$

これは Newton の運動方程式を用いた結果と同一である。

STEP 2: 固有振動数を求める x_1 と x_2 について、次の形の解を仮定する。

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 e^{i\omega t} \\ x_2 &= a_2 e^{i\omega t} \end{aligned}$$

a_1 および a_2 は適当な複素定数であり、 x_1 および x_2 の実部が物理的な変位に対応するものとする。
上の解を考えることは、次のような解を仮定していることを意味している。

- (1) x_1 と x_2 の振動数は同一である。
- (2) x_1 と x_2 の位相および振幅は異なるかも知れない。
- (3) x_1 と x_2 のいずれも減衰を伴わない。

これを代入して、 a_1 および a_2 に関して次の連立方程式を得る。

$$(-m\omega^2 + 2k)a_1 - ka_2 = 0 \quad (10)$$

$$-ka_1 + (-m\omega^2 + 2k)a_2 = 0 \quad (11)$$

自明な解 ($a_1 = a_2 = 0$) 以外の解を持つためには、この係数の行列式がゼロでなければならない。

$$\begin{aligned} \Delta &= (-m\omega^2 + 2k)(-m\omega^2 + 2k) - k^2 \\ &= m^2\omega^4 - 4mk\omega^2 + 3k^2 = 0 \end{aligned}$$

これより次の根を得る。

$$\omega^2 = \frac{1}{m^2} \left(2mk \mp \sqrt{4m^2k^2 - 3m^2k^2} \right) = (2 \mp 1) \frac{k}{m} = \frac{k}{m}, \frac{3k}{m} = \omega_1^2, \omega_2^2 \quad (12)$$

ただし複号は上段が ω_1 に、下段が ω_2 に対応している。

STEP 3: 固有振動モードを求める 振動数 ω_1 または ω_2 で振動する場合には、 a_1 および a_2 は 0 以外の値を取り得るが、その比は式 (10) または (11) から求まる。

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{-m\omega^2 + 2k}{k} = \begin{cases} 1 & (\text{when } \omega = \omega_1) \\ -1 & (\text{when } \omega = \omega_2) \end{cases} \quad (13)$$

式 (25) または (11) のいずれを用いても同じ結果になるはずである。つまり、 a_1 と a_2 は全く任意の値ではなく、その比は上式を満たさなければならない。また、上式より、 a_2/a_1 は実数であり、 $\omega = \omega_1 = \sqrt{k/m}$ の時は、 a_1 と a_2 は同位相、 $\omega = \omega_2 = \sqrt{3k/m}$ の時は逆位相であることが分かる。

ω_1 、 ω_2 をそれぞれ、1 次および 2 次の固有角振動数 (値の小さいほうから順に 1 次、2 次) といい、 ω_1 、 ω_2 に対応する振動の形 (x_1 と x_2 の比) を 1 次および 2 次の固有振動モード (natural vibration mode または normal vibration mode) という。

つまり，1 次の固有振動モードで振動しているときは，

$$\begin{aligned}x_1 &= C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\x_2 &= C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) = x_1\end{aligned}$$

で表され，また，2 次の固有振動モードで振動しているときは，

$$\begin{aligned}x_1 &= C_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\x_2 &= -C_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) = -x_1\end{aligned}$$

で表される振動となる。ここで， C_1 ， ϕ_1 および C_2 ， ϕ_2 は任意の定数である。

一般の振動はこの2つの単振動の重ね合わせであり，次式で表すことができる。

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} C_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ C_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ を1次のモードベクトル， $\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$ を2次のモードベクトル， $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ をモード行列という。

式(8)および(9)を加算または減算して，

$$\begin{aligned}q_1 &= x_1 + x_2 \\q_2 &= x_1 - x_2\end{aligned}$$

とくと，次の形に書き直す事ができる。

$$\begin{aligned}m \frac{d^2 q_1}{dt^2} + k q_1 &= 0 \\m \frac{d^2 q_2}{dt^2} + 3k q_2 &= 0\end{aligned}$$

これより，2つの座標を組み合わせた新たな座標 $q_1 = x_1 + x_2$ および $q_2 = x_1 - x_2$ は $\omega = \sqrt{k/m}$ ， $\sqrt{3k/m}$ の単振動をすることが分かる。つまり，振動系の座標を選ぶときにある座標系を選べば，その座標系では常に独立な1自由度の振動となるような座標系があることが分かる。このような座標 q_1 および q_2 をモード座標（または規準座標，ノルマル座標）という。

16 2自由度系の自由振動 (2/3)

16.1 二重振り子

Fig.4 に示すように、鉛直面内で振動する二重振り子を考える。座標として θ_1 および θ_2 を選ぶ

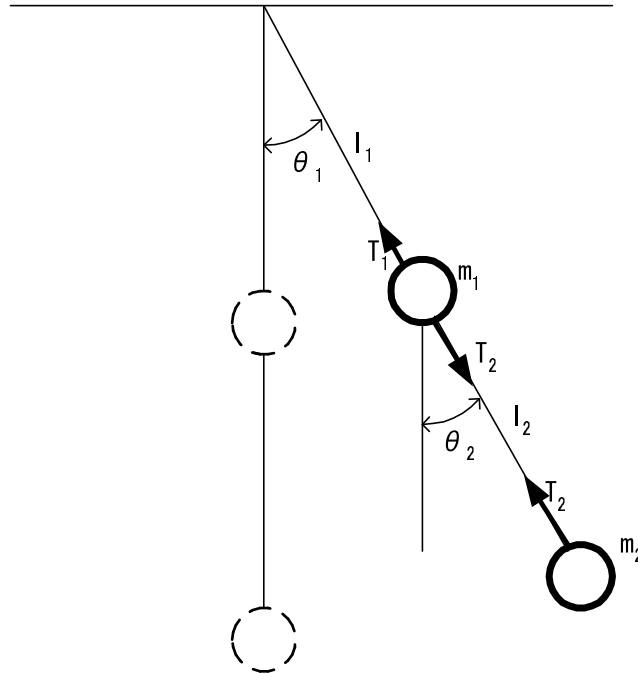


Fig. 4: 二重振り子

と、質点の座標は次式である。

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1 \quad (14)$$

$$y_1 = -l_1 \cos \theta_1 \quad (15)$$

$$x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \quad (16)$$

$$y_2 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 \quad (17)$$

STEP 1a: 運動方程式 (Newton の運動方程式を適用) 糸の張力を T_1 および T_2 とすると、Newton の運動方程式は次式である。

$$m_1 \ddot{x}_1 = -T_1 \sin \theta_1 + T_2 \sin \theta_2 \quad (18)$$

$$m_1 \ddot{y}_1 = T_1 \cos \theta_1 - T_2 \cos \theta_2 - m_1 g \quad (19)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -T_2 \sin \theta_2 \quad (20)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = T_2 \cos \theta_2 - m_2 g \quad (21)$$

これより T_1 および T_2 を消去すれば求める運動方程式が得られる。

まず, 式 (18), (19) より T_1 を消去して,

$$m_1\ddot{x}_1 \cos \theta_1 + m_1\ddot{y}_1 \sin \theta_1 = T_2(\cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2) - m_1g \sin \theta_1$$

上式と式 (21) に式 (20) の T_2 を用いて, 次式となる。

$$\begin{aligned} (m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2) \cos \theta_1 + (m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2) \sin \theta_1 + (m_1 + m_2)g \sin \theta_1 &= 0 \\ m_2\ddot{x}_2 \cos \theta_2 + m_2\ddot{y}_2 \sin \theta_2 + m_2g \sin \theta_2 &= 0 \end{aligned}$$

これに式 (14)~(17) を用いて, θ_1 および θ_2 で表すと次式となる。

$$\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)l_1\ddot{\theta}_1 + l_2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)g \sin \theta_1 = 0 \quad (22)$$

$$l_1\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - l_1\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2\ddot{\theta}_2 + g \sin \theta_2 = 0 \quad (23)$$

STEP 1b: 運動方程式 (Lagrange の運動方程式を適用) 運動エネルギー T および重力によるポテンシャルエネルギー U は次式である。

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ U &= m_1gy_1 + m_2gy_2 \end{aligned}$$

これに式 (14)~(17) を用いると, 次式となる。

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1}{2} \left[(l_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1)^2 + (-l_1\dot{\theta}_1 \sin \theta_1)^2 \right] \\ &\quad + \frac{m_2}{2} \left[(l_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 + (l_1\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2 \right] \\ &= \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} \left[l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right] \\ U &= -m_1gl_1 \cos \theta_1 - m_2g(l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \end{aligned}$$

これを Lagrange の運動方程式に用いて, 次式を得る。

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} + \frac{\partial U}{\partial \theta_1} \\ &= \frac{d}{dt} \left[(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right] + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1 \\ &= (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2l_1l_2\dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1 \\ &= (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1 \\ &= 0 \\ &\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} + \frac{\partial U}{\partial \theta_2} \\ &= \frac{d}{dt} \left[m_2l_2^2\dot{\theta}_2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right] - m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2gl_2 \sin \theta_2 \\ &= m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2l_1l_2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad - m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2gl_2 \sin \theta_2 \\ &= m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2l_1l_2\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2gl_2 \sin \theta_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

整理して次式となる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)l_1\ddot{\theta}_1 + l_2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)g \sin \theta_1 &= 0 \\ l_1\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - l_1\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2\ddot{\theta}_2 + g \sin \theta_2 &= 0 \end{aligned}$$

これは Newton の運動方程式を用いた結果と同一である。この程度に複雑となると, Lagrange の運動方程式を用いるほうが簡単であるが, 拘束力 (例えば, 張力 T_1 または T_2 等) を求める際には, Newton の運動方程式 (18)~(21) に立ち返る必要がある。

式 (22) および (23) の解を解析的に求めることはできないため, 必要があれば, Runge-Kutta 法等を用いて数値解を求めればよい。

$\theta_1, \theta_2 \ll 1 \text{ rad}$ の場合は, $\sin \theta_1 \simeq \theta, \cos \theta_1 \simeq 1, \dot{\theta}_1^2 \simeq 0$ 等と近似することにより, 式 (22) および (23) は次式となる。

$$\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)l_1\ddot{\theta}_1 + l_2\ddot{\theta}_2 + \left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)g\theta_1 = 0 \quad (24)$$

$$l_1\ddot{\theta}_1 + l_2\ddot{\theta}_2 + g\theta_2 = 0 \quad (25)$$

これは線形定数係数の連立常微分方程式であり, 先の例と同様に解を求めることができる。

式 (24), (25) は次のように表すこともできる。

$$\begin{aligned} m_1l_1\ddot{\theta}_1 + (m_1 + m_2)g\theta_1 - m_2g\theta_2 &= 0 \\ m_1l_2\ddot{\theta}_2 - (m_1 + m_2)g(\theta_1 - \theta_2) &= 0 \end{aligned}$$

STEP 2: 固有振動数 式 (24), (25) の解を $\theta_1 = a_1e^{i\omega t}, \theta_2 = a_2e^{i\omega t}$ の形に仮定して代入すると,

$$\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)(-l_1\omega^2 + g)a_1 - l_2\omega^2a_2 = 0 \quad (26)$$

$$-l_1\omega^2a_1 + (-l_2\omega^2 + g)a_2 = 0 \quad (27)$$

これが $a_1 = a_2 = 0$ 以外の解を持つための条件より,

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)(-l_1\omega^2 + g)(-l_2\omega^2 + g) - l_1l_2\omega^4 \\ &= \frac{m_1}{m_2}l_1l_2\omega^4 - \left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)(l_1 + l_2)g\omega^2 + \left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)g^2 = 0 \end{aligned}$$

これより,

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_1^2, \omega_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) \mp \sqrt{\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)^2 \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)^2 - 4 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \frac{1}{l_1l_2}} \right\} g \quad (28) \end{aligned}$$

となる。 $m_1 = m_2 = m, l_1 = l_2 = l$ の場合は以下となる。

$$\omega_1, \omega_2 = \sqrt{(2 \mp \sqrt{2}) \frac{g}{l}} = 0.7654\sqrt{\frac{g}{l}}, \quad 1.8476\sqrt{\frac{g}{l}}$$

STEP 3: 固有振動モード 式 (28) の ω_1, ω_2 を式 (26) または (27) に用いると, 固有振動モード a_2/a_1 が求まる。

$$\begin{aligned} \frac{a_2}{a_1} &= \frac{l_1 \omega^2}{g - l_2 \omega^2} \\ &= \frac{\frac{l_1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) \mp \sqrt{\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)^2 \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)^2 - 4 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \frac{1}{l_1 l_2}} \right\} g}{g - \frac{l_2}{2} \left\{ \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) \mp \sqrt{\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)^2 \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)^2 - 4 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \frac{1}{l_1 l_2}} \right\} g} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right) \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)^2 \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right)^2 + 4 \left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right) \frac{l_1}{l_2}} \right\} \quad (29) \end{aligned}$$

$m_1 = m_2 = m, l_1 = l_2 = l$ の場合は

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{l_1 \omega^2}{g - l_2 \omega^2} = \frac{2 \mp \sqrt{2}}{-1 \pm \sqrt{2}} = \pm \sqrt{2} = 1.4142, \quad -1.4142$$

つまり, 対応するモードベクトルは次式となる。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.4142 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.4142 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

16.2 2 個の重りとはね

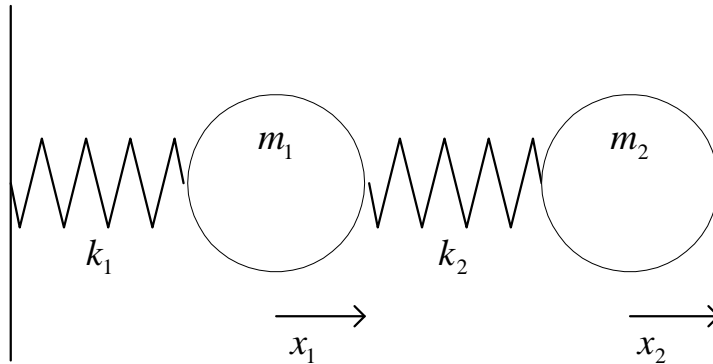


Fig. 5: 2 個のばねで結合した 2 個の重り

Fig.5 に示すように, 2 個ばねで結合した 2 個の重りの自由振動を考える。

STEP 1: 運動方程式 運動方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 &= 0 \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} - k_2 x_1 + k_2 x_2 &= 0 \end{aligned}$$

STEP 2: 固有振動数 $x_1 = ae^{i\omega t}$, $x_2 = be^{i\omega t}$ を代入して,

$$\begin{aligned} (-m_1\omega^2 + k_1 + k_2)a - k_2b &= 0 \\ -k_2a + (-m_2\omega^2 + k_2)b &= 0 \end{aligned}$$

特性方程式は,

$$\begin{aligned} \Delta &= (-m_1\omega^2 + k_1 + k_2)(-m_2\omega^2 + k_2) - k_2^2 \\ &= m_1m_2\omega^4 - (m_2k_1 + m_2k_2 + m_1k_2)\omega^2 + k_1k_2 = 0 \end{aligned}$$

固有振動数は,

$$\omega^2 = \omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \mp \sqrt{\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right)^2 - 4\frac{k_1k_2}{m_1m_2}} \right\} \quad (30)$$

STEP 3: 固有振動モード a と b の比は,

$$\begin{aligned} \beta = \frac{b}{a} &= \frac{-m_1\omega^2 + k_1 + k_2}{k_2} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{k_1 + k_2}{k_2} - \frac{m_1}{m_2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1 + k_2}{k_2} - \frac{m_1}{m_2} \right)^2 + 4\frac{m_1}{m_2}} \right\} \end{aligned} \quad (31)$$

となる。

16.3 ばねで支えた剛体の上下・回転の振動

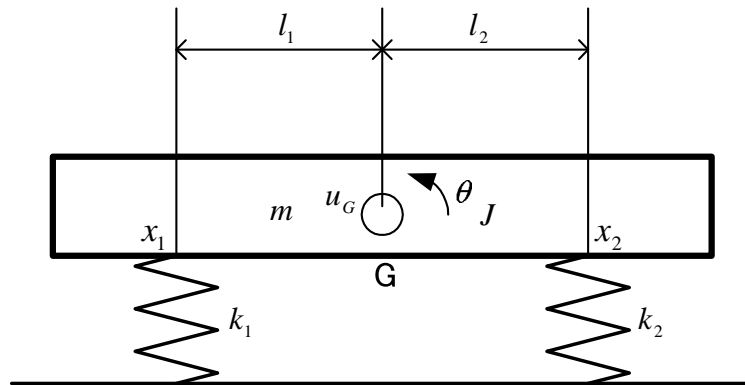


Fig. 6: 車のサスペンション

重心から l_1 と l_2 離れた位置ではばね定数 k_1 と k_2 のばねで支えられた, 質量 m で重心回りの慣性モーメント J の剛体の運動を解析する。重心の上方向変位を x_G , 回転角を θ とすると, ばねの変位は次式で表される。

$$\begin{aligned} x_1 &= x_G - l_1 \sin \theta \cong x_G - l_1 \theta \\ x_2 &= x_G + l_2 \sin \theta \cong x_G + l_2 \theta \end{aligned}$$

STEP 1: 運動方程式 運動エネルギーおよびポテンシャルエネルギーは次式で表される。

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_G^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 = \frac{1}{2}k_1(x_G - l_1\theta)^2 + \frac{1}{2}k_2(x_G + l_2\theta)^2$$

これを Lagrange 式に用いて次の運動方程式を得る。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_G} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_G} + \frac{\partial U}{\partial x_G} = \frac{d}{dt}(m\dot{x}_G) + k_1(x_G - l_1\theta) + k_2(x_G + l_2\theta) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}(J\dot{\theta}) - k_1(x_G - l_1\theta)l_1 + k_2(x_G + l_2\theta)l_2 = 0$$

つまり,

$$m\ddot{x}_G + (k_1 + k_2)x_G + (k_2l_2 - k_1l_1)\theta = 0$$

$$J\ddot{\theta} + (k_2l_2 - k_1l_1)x_G + (k_2l_2^2 + k_1l_1^2)\theta = 0$$

STEP 2: 固有振動数 $x_G = ae^{i\omega t}$, $\theta = be^{i\omega t}$ を代入して,

$$(-m\omega^2 + k_1 + k_2)a + (k_2l_2 - k_1l_1)b = 0$$

$$(k_2l_2 - k_1l_1)a + (-J\omega^2 + k_1l_1^2 + k_2l_2^2)b = 0$$

特性方程式は,

$$\Delta = (-m\omega^2 + k_1 + k_2)(-J\omega^2 + k_1l_1^2 + k_2l_2^2) - (k_2l_2 - k_1l_1)^2$$

$$= mJ\omega^4 - \{(k_1 + k_2)J + (k_1l_1^2 + k_2l_2^2)m\}\omega^2 + k_1k_2(l_1 + l_2)^2 = 0$$

つまり,

$$\omega^4 - \left(\frac{k_1 + k_2}{m} + \frac{k_1l_1^2 + k_2l_2^2}{J} \right) \omega^2 + \frac{k_1k_2(l_1 + l_2)^2}{mJ} = 0$$

これより, 固有振動数は次式となる。

$$\omega^2 = \omega_1^2, \omega_2^2$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{k_1 + k_2}{m} + \frac{k_1l_1^2 + k_2l_2^2}{J} \mp \sqrt{\left(\frac{k_1 + k_2}{m} + \frac{k_1l_1^2 + k_2l_2^2}{J} \right)^2 - 4 \frac{k_1k_2(l_1 + l_2)^2}{mJ}} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{k_1 + k_2}{m} + \frac{k_1l_1^2 + k_2l_2^2}{J} \mp \sqrt{\left(\frac{k_1 + k_2}{m} - \frac{k_1l_1^2 + k_2l_2^2}{J} \right)^2 + 4 \frac{(k_1l_1 - k_2l_2)^2}{mJ}} \right\}$$

STEP 3: 固有振動モード 固有振動モードは上の ω_1, ω_2 を用いて, 次式より求まる。

$$= \frac{b}{a} = \frac{-m\omega^2 + k_1 + k_2}{k_1l_1 - k_2l_2}$$

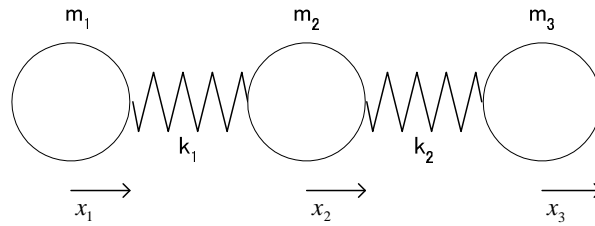


Fig. 7: 2個のばねで結合した3個の重り

16.4 ばねで結合した3個の重りの並進と振動

STEP 1: 運動方程式 各重りの変位を x_1 , x_2 および x_3 とすると,

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2$$

$$U = \frac{1}{2}k_1(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_3)^2$$

これを Lagrange 式に用いて次の運動方程式を得る。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{d}{dt}(m_1\dot{x}_1) - 0 + k_1(x_1 - x_2) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} + \frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{d}{dt}(m_2\dot{x}_2) - 0 - k_1(x_1 - x_2) + k_2(x_2 - x_3) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_3} + \frac{\partial U}{\partial x_3} = \frac{d}{dt}(m_3\dot{x}_3) - 0 - k_2(x_2 - x_3) = 0$$

つまり,

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 - k_1x_2 = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 - k_1x_1 + (k_1 + k_2)x_2 - k_2x_3 = 0$$

$$m_3\ddot{x}_3 - k_2x_2 + k_2x_3 = 0$$

STEP 2: 固有振動数 $x_1 = ae^{i\omega t}$, $x_2 = be^{i\omega t}$ および $x_3 = ce^{i\omega t}$ の形の解を仮定して, 代入する。

$$(-m_1\omega^2 + k_1)a - k_1b = 0$$

$$-k_1a + (-m_2\omega^2 + k_1 + k_2)b - k_2c = 0$$

$$-k_2b + (-m_3\omega^2 + k_2)c = 0$$

これが自明な解以外の解を持つには次式が成立しなければならない。

$$\det \begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & -m_2\omega^2 + k_1 + k_2 & k_2 \\ 0 & -k_2 & -m_3\omega^2 + k_2 \end{bmatrix} = 0$$

整理して

$$\omega^6 - \left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_1 + k_2}{m_2} + \frac{k_2}{m_3} \right) \omega^4 + \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3} k_1 k_2 \omega^2 = 0$$

この解は,

$$\begin{aligned}\omega_0^2 &= 0 \\ \omega_1^2, \omega_2^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_1 + k_2}{m_2} + \frac{k_2}{m_3} \right) \\ &\quad \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_1 + k_2}{m_2} + \frac{k_2}{m_3} \right)^2 - 4 \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3} k_1 k_2}\end{aligned}$$

STEP 3: 固有振動モード $\omega = \omega_0 = 0$ となる時は, 対応する固有振動モードは $a = b = c$ となり, これは, 3 個の重りが単に並進運動することを意味しており, このときバネは変形しない。

各固有振動数が $\omega = \omega_1, \omega_2$ に対応する固有振動モードは, 次式となる。

$$\begin{aligned}\frac{b}{a} &= \frac{-m_1 \omega^2 + k_1}{k_1} \\ \frac{c}{\bar{b}} &= \frac{k_2}{-m_2 \omega^2 + k_2}\end{aligned}$$

$m_1 = m_2 = m_3 = m$ および $k_1 = k_2 = k$ の時, 固有振動数は次式となる。

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sqrt{k/m} \\ \omega_2 &= \sqrt{3k/m}\end{aligned}$$

対応する固有振動モードは, 次式となる。

$$\begin{aligned}a : b : c &= 1 : 0 : -1 \quad (\text{when } \omega = \omega_1) \\ a : b : c &= 1 : -2 : 1 \quad (\text{when } \omega = \omega_2)\end{aligned}$$

つまり, 1 次モードでは x_2 は動かず, x_1 と x_3 が逆位相で同一振幅で振動する。2 次モードでは, x_1 と x_3 が同位相で同一振幅で振動し, x_2 が逆位相で, 2 倍の振幅で振動する。

一般に, この振動系の運動は, 重心が等速直線運動をするように並進運動しながら, 上の 1 次モードおよび 2 次モードの固有振動モードを任意の比率で重ねあわせたものとなる。

17 2自由度系の自由振動 (3/3)

17.1 一般の2自由度系非減衰自由振動

STEP 1: 運動方程式 減衰を伴わない2自由度系の自由振動の運動方程式は、一般に次式で表される。

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + k_{11} x_1 + k_{12} x_2 = 0 \quad (32)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + k_{21} x_1 + k_{22} x_2 = 0 \quad (33)$$

行列表示すると

$$M\ddot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = 0 \quad (34)$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} \quad (35)$$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \quad (37)$$

STEP 2: 固有振動数 この解を $x_1(t) = a_1 e^{i\omega t}$, $x_2(t) = a_2 e^{i\omega t}$ の形に仮定して代入すると,

$$(-m_1 \omega^2 + k_{11})a_1 + k_{12}a_2 = 0$$

$$k_{21}a_1 + (-m_2 \omega^2 + k_{22})a_2 = 0$$

または

$$(-\omega^2 + k_{11}/m_1)a_1 + (k_{12}/m_1)a_2 = 0 \quad (38)$$

$$(k_{21}/m_2)a_1 + (-\omega^2 + k_{22}/m_2)a_2 = 0 \quad (39)$$

となる。行列表示すると,

$$(-\omega^2 I + B)\mathbf{a} = 0$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = M^{-1}K = \begin{bmatrix} k_{11}/m_1 & k_{12}/m_1 \\ k_{21}/m_2 & k_{22}/m_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

自明な解 ($a_1 = a_2 = 0$) 以外の解を持つためには係数行列式が 0 でなければならないことから、次の特性方程式が得られる。

$$\Delta = \begin{vmatrix} k_{11}/m_1 & k_{12}/m_1 \\ k_{21}/m_2 & k_{22}/m_2 \end{vmatrix} = (-\omega^2 + \frac{k_{11}}{m_1})(-\omega^2 + \frac{k_{22}}{m_2}) - \frac{k_{12}k_{21}}{m_1 m_2} = 0$$

つまり,

$$\omega^4 - \left(\frac{k_{11}}{m_1} + \frac{k_{22}}{m_2} \right) \omega^2 + \frac{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}{m_1m_2} = 0$$

これより, 固有振動数は次式となる。

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_1^2, \omega_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{k_{11}}{m_1} + \frac{k_{22}}{m_2} \right) \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{k_{11}}{m_1} + \frac{k_{22}}{m_2} \right)^2 - 4 \frac{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}{m_1m_2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{k_{11}}{m_1} + \frac{k_{22}}{m_2} \right) \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{k_{11}}{m_1} - \frac{k_{22}}{m_2} \right)^2 + 4 \frac{k_{12}k_{21}}{m_1m_2}} \end{aligned}$$

固有振動数 ω_1^2, ω_2^2 は行列 $B = M^{-1}K$ の固有値となっていることが分かる。

STEP 3: 固有振動モード この ω^2 の値 ω_1^2 または ω_2^2 を式 (38) または (39) に用いると, a_1 と a_2 の比が下記のように求まる。

$$\begin{aligned} \frac{a_2}{a_1} &= \frac{m_1\omega^2 - k_{11}}{k_{12}} \\ &= \begin{cases} \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{1}{2k_{12}} \left[\left(\frac{m_1}{m_2}k_{22} - k_{11} \right) - \sqrt{\left(\frac{m_1}{m_2}k_{22} - k_{11} \right)^2 + 4 \frac{m_1}{m_2}k_{12}k_{21}} \right] \\ \frac{a_{22}}{a_{12}} = \frac{1}{2k_{12}} \left[\left(\frac{m_1}{m_2}k_{22} - k_{11} \right) + \sqrt{\left(\frac{m_1}{m_2}k_{22} - k_{11} \right)^2 + 4 \frac{m_1}{m_2}k_{12}k_{21}} \right] \end{cases} \end{aligned}$$

となる。この式右辺の上段・下段はそれぞれ, ω_1, ω_2 に対応しており, それぞれ, 1 次・2 次の振動モードと呼ばれる。また, これらは行列 $B = M^{-1}K$ の固有値 ω_1^2, ω_2^2 に対応する固有ベクトルとなっている。

もとの方程式 (32), (33) の一般解は上記の 1 次の振動と 2 次の振動を重ね合わせたものであり, 次式となる。

$$x_1(t) = a_{11}C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + a_{12}C_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (40)$$

$$x_2(t) = a_{21}C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + a_{22}C_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (41)$$

または行列を用いて,

$$\mathbf{x}(t) = A \begin{Bmatrix} C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ C_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{Bmatrix} \quad (42)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (43)$$

ここで, C_1, C_2, ϕ_1, ϕ_2 は, $t = 0$ での $x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)$ の値 (初期条件) の依存し, 場合によっては 1 次の振動だけ, または 2 次の振動だけとなる場合もある。

$\begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{Bmatrix}$ および $\begin{Bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{Bmatrix}$ は, それぞれ一次および 2 次のモードベクトルと呼ばれ, モード (列) ベクトルを横に並べた固有行列 A はモード行列と呼ばれる。

STEP 4: モード座標 上記の解 (42) にモード行列の逆行列 A^{-1} を左からかけると,

$$A^{-1}\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ C_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{Bmatrix}$$

となる。つまり, 元の座標 $x_1(t), x_2(t)$ を組み合わせて, 別の座標 $q_1(t), q_2(t)$

$$\mathbf{q}(t) = A^{-1}\mathbf{x}(t) \quad (44)$$

または

$$\begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} \quad (45)$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \quad (46)$$

をつくと, $q_1(t), q_2(t)$ はそれぞれ, 1 次の振動 $C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$ および 2 次の振動 $C_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$ で振動することになる。このような座標 $q_1(t), q_2(t)$ をモード座標とよぶ。

式 (32), (33) を $q_1(t), q_2(t)$ を用いて表すと,

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 &= 0 \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 &= 0 \end{aligned}$$

となっており, 2 つの独立な 1 自由度振動となっている。

18 2自由度系の強制振動 (1/2)

18.1 3個のばねで結合した2個の重り

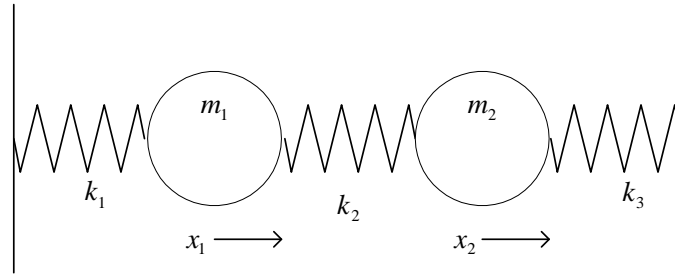


Fig. 8: 3個のばねで結合した2個の重り

以前に検討した2重り, 3ばねより構成される系を考える。一方の重り m_1 に x_1 方向に外力 $f = f_0 e^{i\Omega t}$ が作用する場合を考える。運動方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 &= f_0 e^{i\Omega t} \\ m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 &= 0 \end{aligned}$$

固有振動数および固有振動モードは式 (12) および (13) であり, 下記に再度記す。

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{k}{m}}, & \omega_2 &= \sqrt{\frac{3k}{m}} \\ \beta &= \frac{b}{a} = 1, -1 \end{aligned}$$

ここで, 次の形の特解を求める。

$$\begin{aligned} x_1 &= Ae^{i\Omega t} \\ x_2 &= Be^{i\Omega t} \end{aligned}$$

これを代入して次式を得る。

$$\begin{aligned} (-m\Omega^2 + 2k)A - kB &= f_0 \\ -kA + (-m\Omega^2 + 2k)B &= 0 \end{aligned}$$

これより, A, B を求めると,

$$\begin{aligned} A &= \frac{f_0(2k - m\Omega^2)}{(k - m\Omega^2)(3k - m\Omega^2)} = \frac{\frac{2f_0}{3k} \left(1 - \frac{m\Omega^2}{2k}\right)}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right) \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_2^2}\right)} \\ B &= \frac{f_0 k}{(k - m\Omega^2)(3k - m\Omega^2)} = \frac{\frac{f_0}{3k}}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right) \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_2^2}\right)} \end{aligned}$$

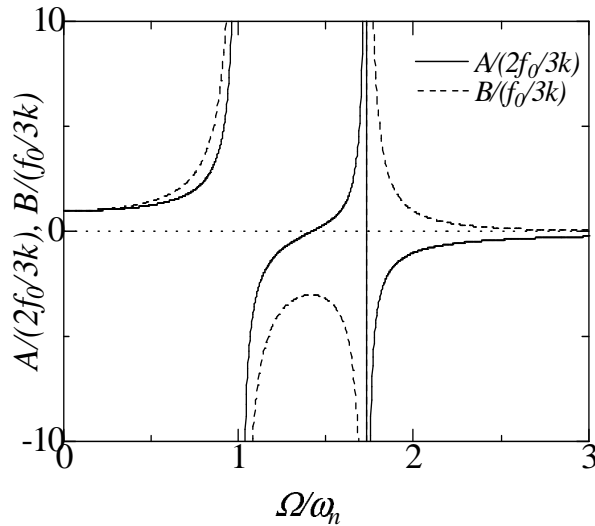


Fig. 9:2 自由度強制振動共振曲線

Table 2: 2 自由度強制振動の位相特性

| Ω | ω_1 | $\sqrt{2k/m}$ | ω_2 |
|----------|------------|---------------|------------|
| A | + | ∞ | - |
| B | + | ∞ | - |

2 自由度の強制振動では、2 つの共振振動数が存在し、それらは $\Omega = \omega_1, \omega_2$ 、つまり、固有振動数である。共振すると、計算上は振幅は無限大となるが、実際には必ず減衰が存在するので、有限の振幅に留まる。

また、強制力 f と x_1 および x_2 の位相関係は、 A および B の符号により定まる。これを Table2 に示す。

$\Omega = \sqrt{2k/m}$ の時、 $A = 0$ となり、強制力を加えている重りは静止する。この時 x_2 は、

$$x_2 = B e^{i\Omega t} = \frac{f_0 k}{(k - 2k)(3k - 2k)} e^{i\Omega t} = -f_0 e^{i\Omega t} k$$

となり、強制力 f と逆位相になり、重り m_1 に対して、 $kx_2 = -f$ の力を及ぼして、強制力と完全に釣り合っている。この振動数 $\Omega = \sqrt{2k/m}$ は、 m_1 を固定して m_2 だけを振動させた時の振動数である。

18.2 2 個のばねで結合した 2 個の重り

Fig.10 において、重り m_1 に $f = f_0 \cos \Omega t$ の外力が働くとき、各重りに働く力の釣り合いから、運動方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - kx_2 &= f_0 e^{i\Omega t} \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 &= 0 \end{aligned}$$

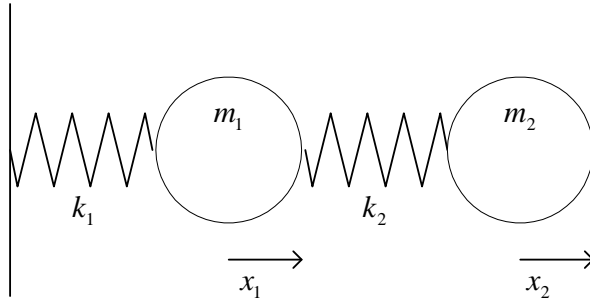


Fig. 10: 2 個のばねで結合した 2 個の重り

この系の固有振動数と固有振動モードは、式 (30) および式 (31) で求めている。

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \mp \sqrt{\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right)^2 - 4 \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}} \right\}$$

$$\beta = \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{k_1 + k_2}{k_2} - \frac{m_1}{m_2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1 + k_2}{k_2} - \frac{m_1}{m_2} \right)^2 + 4 \frac{m_1}{m_2}} \right\}$$

ここで、次の形の特解を求める。

$$x_1 = Ae^{i\Omega t}$$

$$x_2 = Be^{i\Omega t}$$

これを代入して、 A B を求めると次式となる。

$$A = \frac{\frac{f_0}{k_1} \left(1 - \frac{m_2 \Omega^2}{k_2} \right)}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_1^2} \right) \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_2^2} \right)}$$

$$B = \frac{\frac{f_0}{k_1}}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_1^2} \right) \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_2^2} \right)}$$

この場合も、 $\Omega = \omega_1$ および $\Omega = \omega_2$ で共振が生じ、振幅が無大となる。また、 $\Omega = \sqrt{k_2/m_2}$ で、外力を加えている重り m_1 が静止し、この時の外力は、重り m_2 の振動に伴うばね力

$$f_{k_2} = k_2 x_2 = k_2 [Be^{i\Omega t}]_{\Omega=\sqrt{k_2/m_2}}$$

と釣り合っているはずである。

19 2自由度系の強制振動 (2/2)

19.1 動吸振器

前述の例で、加振力を作用させている重りは、加振力がある振動数の時に振幅がゼロとなる。第1の例では $\Omega = \sqrt{2k/m}$ であり、第2の例では $\Omega = \sqrt{k_2/m_2}$ である。この値は、重り m_1 を固定して、重り m_2 だけを振動させたときの振動数である。

このように、加振力の振動数が一定である場合には、付加的な振動子を加えて、振動を吸収することができる。

19.2 変位による強制振動

ばねを固定している基礎が、 $x_b(t) = ae^{i\Omega t}$ のように振動する場合は、重りの絶対変位で振動を表したとき、ばねにつながれた方の重りに $kx_b(t) = ka e^{i\Omega t}$ の外力が作用したのと等価である。

19.3 回転する不釣り合い力による強制振動

質量 m_1 の重りに取りつけられた質量 m_r の小さな重りが、半径 r で角速度 Ω で回転している。重り m_1 の座標を x_1 、重り m_r の絶対座標を x_r とする時、

$$x_r = x_1 + r e^{i\Omega t} \quad (\text{但し、実部のみが物理的変位に対応})$$

と表される。

重り m_1 と m_r の両者に働く外力を $f_{1r}(t)$ とする時、この $m_1 + m_r$ の重りの運動方程式は次式となる。

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_r \frac{d^2 x_r}{dt^2} = f_{1r}(t)$$

これに

$$\frac{d^2 x_r}{dt^2} = \frac{d^2 x_1}{dt^2} - r \Omega^2 e^{i\Omega t}$$

を用いると、次式となる。

$$(m_1 + m_r) \frac{d^2 x_1}{dt^2} = f_{1r}(t) + m_r r \Omega^2 e^{i\Omega t}$$

つまり、質量 $m_1 + m_r$ の重りに

$$m_r r \Omega^2 e^{i\Omega t}$$

の不釣り合い力が付加されたのに等しい。

参考文献

- [1] 小野 周, "岩波講座基礎工学 1 力学 (3)", 岩波書店 (1968).
- [2] カルマン, ビオ (村上他訳), "工学における数学的方法 上, 下", 法政大学出版局 (1954).
- [3] 近藤泰郎, 小林邦夫, "よくわかる機械力学", オーム社 (1995).

[4] 中村行三, 関谷 莊, ”機械力学”, いずみ書房 (1961).

[5] 井町 勇 他, ”機械振動学”, 朝倉書店 (1964).