

# 機械力学講義ノート (連続体の振動)

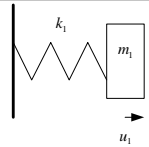
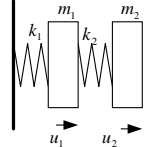
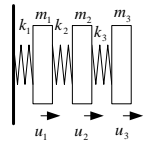
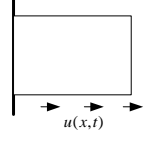
S. Yamauchi

2014年1月28日

## 目次

20	連続体の振動の運動方程式 (波動方程式)	301
21	2 階線形偏微分方程式	303
21.1	2 階線形偏微分方程式の分類	303
21.2	波動方程式 (弦の振動) の解	303
22	弦, 棒および気柱の振動 (1/2)	306
22.1	弾性棒の縦振動 (一端固定他端自由)	306
22.2	境界条件と振動モード	307
23	弦, 棒および気柱の振動 (2/2)	309
23.1	端面に付加質量を持つ棒	309
23.2	音と音階 (参考)	313
24	はりの曲げ振動 (1/2)	315
24.1	はりに働く力と変形	315
24.2	はりの運動方程式	316
25	はりの曲げ振動 (2/2)	318
25.1	一様断面はりの自由曲げ振動	318
25.2	種々のはりの曲げ振動 (まとめ)	321
26	回転軸の振動	323
26.1	円板を有する回転軸	323
26.2	Rayleigh 法	324
26.3	Rayleigh-Ritz 法	332
26.4	その他の近似解法	332
26.5	回転軸の振れ回り	333

Table 1 多自由度系と連続体

	自由度	固有振動数 (固有値)	解	振動モード (固有ベクトル)
	1	$\omega$	$u = ae^{i\omega t}$	$a = \dots$
	2	$\omega_1, \omega_2$	$u_1 = a_1e^{i\omega t}, u_2 = a_2e^{i\omega t}$	$a_1 : a_2 = \dots$
	$n$	$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$	$u_1 = a_1e^{i\omega t}, \dots, u_n = a_ne^{i\omega t}$	$a_1 : a_2 : \dots : a_n = \dots$
	$\infty$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$	$u_1 = X(x)e^{i\omega t}$	$X(x) = \dots$  (固有関数)

## 20 連続体の振動の運動方程式 (波動方程式)

連続体の振動は、質量とばねが全体に分布したものであり、多自由度系の自由度が無限に大きくなったものと考えることができる。従って、固有振動数は無限個のとびとびの値となり、固有ベクトルは各部分の振幅を表す場所  $x$  の関数となる。

弦の振動、棒の縦振動、コイルばねの縦振動、気柱の振動、棒のねじり振動等は、連続体の振動として扱うことになる。それぞれの対象について、下記の  $u(x, t)$  を未知の変数とする。これは多数の重りとばねが連結された多自由度系の各重りの座標  $u_1(t), u_2(t), u_3(t), \dots, u_n(t)$  に対応する。

$$u(x, t) = \begin{cases} \text{つり合い位置からの弦の横方向変位} & (\text{弦の振動}) \\ \text{つり合い位置で } x \text{ の位置にある部材面の縦方向変位} & (\text{棒, コイルばねの縦振動}) \\ \text{つり合い位置で } x \text{ の位置にある空気の縦方向変位} & (\text{気柱の振動}) \\ \text{つり合い位置で } x \text{ の位置にある断面のねじれ角} & (\text{棒のねじり振動}) \end{cases}$$

この時、運動方程式は次式で表される ([1])。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

この式は多くの連続体の振動問題に表れる式であり、(1次元の) 波動方程式と呼ばれる。  $c$  は後述のように、

媒体中を波動が伝播する速度 (位相速度) を表しており, それぞれの場合に対して, 次式で表される。

$$c^2 = \begin{cases} T/\rho_l = (\text{張力})/(\text{線密度}) & (\text{弦の振動}) \\ E/\rho = (\text{縦弾性率})/(\text{密度}) & (\text{棒の縦振動}) \\ kl^2/m_s = (\text{ばね定数})(\text{長さ})^2/(\text{質量}) & (\text{コイルばねの縦振動}) \\ (dp/d\rho)_0 = \kappa RT_0 = (\text{比熱比})(\text{ガス定数})(\text{絶対温度}) & (\text{気柱の振動}) \\ G/\rho = (\text{横弾性率})/(\text{密度}) & (\text{棒のねじり振動}) \end{cases} \quad (2)$$

式 (1) の解は次式の形で表すことができる (ダランベールの解)。

$$u(x, t) = F_1(x - ct) + F_2(x + ct)$$

ただし,  $F_1(\xi)$ ,  $F_2(\xi)$  を  $\xi$  の任意の関数である。 $F_1(\xi)$ ,  $F_2(\xi)$  がどんな形であっても, これが式 (1) の解となることは, 代入してみれば分かる。

$F_1(x - ct)$  は, 速度  $c$  で  $x$  の正の方向へ伝播する波を表している。同様に  $F_2(x + ct)$  は速度  $c$  で  $x$  の負の方向へ伝播する波を表している。一般解は, この 2 つの波動を重ね合わせたものとして表される。

例えば, 振幅  $A$ , 波数  $k$  で速度  $\pm c$  で逆方向へ伝播する同一の 2 つの正弦波を重ね合わせると,

$$u(x, t) = A[\sin k(x - ct) + \sin k(x + ct)] = 2A \sin kx \cos kct = 2A \sin kx \cos \omega t$$

となる。ただし,  $\omega = kc$  は (角) 振動数である。これは振幅が  $2A \sin kx$  ( $x = 0, \pi/k, 2\pi/k, 3\pi/k, \dots$  に節あり) で表される定在波を表している。

波の分散性 (参考) 波数  $k$ , 振動数  $\omega$  の波動は

$$u = Ae^{i(kx - \omega t)} = Ae^{ik[x - (\omega/k)t]} \quad (3)$$

と表される。この波の  $x$  方向への伝播速度は  $\omega/k$  である。上の形の解を式 (1) に代入すると

$$(-i\omega)^2 = c^2(ik)^2$$

つまり,

$$\frac{\omega}{k} = c \quad (4)$$

となる。この場合  $c$  は一定値であるから,  $\omega/k$  の値は, 振動数  $\omega$  または波数  $k$  の値によらず一定値となる。このような波を分散性のない波 (非分散性の波) という。式 (4) のような  $\omega$  と  $k$  の依存関係を表す式を一般に分散関係式という。波動方程式が与えられた場合には, 式 (3) の形の解を代入することにより, 分散関係式を求めることができる。

分散 (dispersion) という言葉は, プリズム等を通する光の分散現象からきている。ガラス媒体中の光の伝播速度は振動数 (または波長) により異なるため, プリズムを通すると波長ごとの成分に分かれる (分散が生じる)。

## 21 2 階線形偏微分方程式

### 21.1 2 階線形偏微分方程式の分類

$A, B, C, D, E$  および  $F$  を  $x, y$  の与えられた関数 (または定数) として, 2 独立変数の線形 2 階偏微分方程式は一般に次式で表される。

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = \text{const.} \quad (5)$$

この解は,  $B^2 - 4AC$  の正負に応じて著しく相違することから, 以下のように分類されている ([2])。

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC < 0 & \text{ 楕円型} \\ B^2 - 4AC = 0 & \text{ 放物型} \\ B^2 - 4AC > 0 & \text{ 双曲型} \end{aligned}$$

1 次元の波動方程式 (弦, 気柱の振動, 弾性体の縦振動等の式) は双曲型である。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6)$$

双曲型の式に対しては, 初期時刻での  $u$  と  $\partial u / \partial t$  の値, および計算領域の端点での  $u$  または  $\partial u / \partial x$  の値が与えられなければならない。

参考までに, 他の 2 つの型の例を列挙する。

楕円型の式は, 2 次元の定常熱伝導 ( $u$ : 温度), 石鹸膜形状 ( $u$ : 高さ), 静電場 ( $u$ : 電位), 重力場 ( $u$ : 重力ポテンシャル), ポテンシャル流れ ( $u$ : 速度ポテンシャル) 等の問題で現れる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (7)$$

楕円型の式に対しては, 計算領域の全周にわたって,  $u$  または  $\partial u / \partial x$  (または  $\partial u / \partial y$ ) の値が与えられなければならない。

放物型の式は, 静止物質中をある物理量が拡散する非定常現象 ( $u$ : 温度, 濃度, その他) を記述している。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (8)$$

放物型の式に対しては, 初期時刻での  $u$  の値と, 計算領域の端点での  $u$  または  $\partial u / \partial x$  の値が与えられなければならない。

### 21.2 波動方程式 (弦の振動) の解

弦の振動を対象として, 波動方程式の解を求める。弦の各部分は時間的に正弦波状の振動をすると考え, 次の形の解を仮定する。

$$u(x, t) = X(x)e^{i\omega t} \quad (9)$$

つまり,  $X(x)$  が位置  $x$  に置ける変位  $u(x, t)$  の振幅であり, 振幅は場所によって異なると考える。

これを式 (6) に代入して,

$$-\omega^2 X(x)e^{i\omega t} = c^2 X''(x)e^{i\omega t}$$

つまり,

$$X'' + \frac{\omega^2}{c^2}X = 0$$

となる。この解は次式で表される。

$$X(x) = A \sin \frac{\omega x}{c} + B \cos \frac{\omega x}{c} \quad (10)$$

弦は通常, 両端 ( $x = 0$  および  $x = l$ ) の駒 (ブリッジ) の位置で固定されているので, 両端で変位がゼロ ( $X = 0$ ) であるとの条件 (境界条件) を用いると,

$$X(0) = A \cdot 0 + B \cdot 1 = 0 \quad (11)$$

$$X(l) = A \sin \frac{\omega l}{c} + B \cos \frac{\omega l}{c} = 0 \quad (12)$$

これより,

$$B = 0 \quad (13)$$

$$\sin \frac{\omega l}{c} = 0 \quad (14)$$

従って, 解は次式の形で表される。

$$u_n(x, t) = A_n e^{i\omega_n t} \sin \frac{\omega_n}{c} x = A_n e^{i\omega_n t} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$\text{or } = (C_n \sin \omega_n t + D_n \cos \omega_n t) \sin \frac{\omega_n}{c} x = (C_n \sin \omega_n t + D_n \cos \omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (15)$$

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{l} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (16)$$

$A_n$  を任意定数として, 全ての  $u_n(x, t)$  は解である。これらの解を Fig.1 に示す。

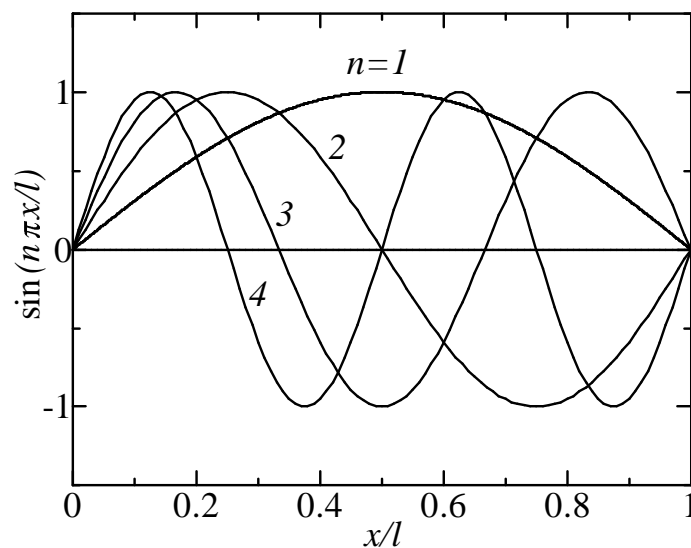


Fig. 1 弦の振動モード

境界条件を満たす任意の解は，これらの解を線形結合することにより，次式で表される。

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \sin \omega_n t + D_n \cos \omega_n t) \sin \frac{\omega_n}{c} x \quad (17)$$

$\omega_n$  は式 (16) であり， $C_n, D_n$  は初期条件 ( $t = 0$  での  $u$  および  $\partial u / \partial t$  の値) を満たすように定める。

## 22 弦, 棒および気柱の振動 (1/2)

### 22.1 弾性棒の縦振動 (一端固定他端自由)

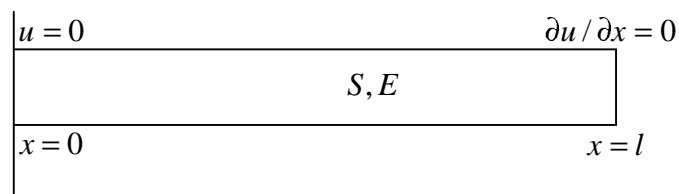


Fig. 2 弾性棒の縦振動

片方を壁面に固定した弾性棒の縦振動を考える。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (18)$$

境界条件は次式で表される。

$$u = 0 \quad \text{at } x = 0 \quad (\text{左端固定}) \quad (19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{at } x = l \quad (\text{右端自由}) \quad (20)$$

次の形の解を仮定する。

$$u(x, t) = X(x)e^{i\omega t} \quad (21)$$

これを代入して,

$$X'' + \frac{\omega^2}{c^2} X = 0$$

となり, この解は次式で表される。

$$X(x) = A \sin \frac{\omega x}{c} + B \cos \frac{\omega x}{c} \quad (22)$$

境界条件 (19), (20) より,

$$X(0) = A \cdot 0 + B \cdot 1 = 0 \quad (23)$$

$$X'(l) = \frac{\omega}{c} \left( A \cos \frac{\omega l}{c} - B \sin \frac{\omega l}{c} \right) = 0 \quad (24)$$

これより,

$$B = 0 \quad (25)$$

$$\cos \frac{\omega l}{c} = 0 \quad (26)$$

従って, 解は次式の形で表される。

$$u_n(x, t) = A_n e^{i\omega_n t} \sin \frac{\omega_n}{c} x = A_n e^{i\omega_n t} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \quad (27)$$

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi c}{2l} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (28)$$

$A_n$  を任意定数として, 全ての  $u_n(x, t)$  は解であり, 実際の振動はこれらの重ね合わせとなる。

## 22.2 境界条件と振動モード

波長，振動数  $f = \omega/(2\pi)$  と波動の伝播速度 (位相速度)  $c$  の間には，

$$(\text{波長}) \times (\text{振動数}) = (\text{波の速度})$$

つまり

$$\lambda_n \frac{\omega_n}{2\pi} = c$$

の関係がある。振動モードが決まると波長  $\lambda_n$  が定まるので，対応する固有振動数は次式で求まる。

$$\omega_n = 2\pi \frac{c}{\lambda_n} \quad (29)$$

弦の振動では通常は両端が固定されており，両端が節となるので， $n$  次の振動モードに対して，波長は

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}$$

であるから，固有振動数は次式となる。

$$\omega_n = 2\pi \frac{c}{2l/n} = \frac{n\pi c}{l}$$

弾性体の縦振動，気柱の振動，棒の捩り振動等ではその他の場合 (境界条件) も可能である。境界条件に応じて，端部が腹になったり，節になったりする。腹と節の位置が分かれば，波長が分かり，式 (29) よりそれぞれの振動モードに対応する固有振動数が求まる。

(固定端，密閉端) これは下記の場合に対応する。

- (1) 弾性体またはコイルバネの縦振動で端面が壁面等に拘束されている場合。この時は，端面位置で変位が生じない。

$$u = 0 \quad \text{at 端面位置} \quad (30)$$

- (2) 気柱の振動で端面が密閉されている場合。この時は，端面位置で 気体が移動しないため，式 (30) が成立する。

- (3) 棒の捩り振動で棒の端面が壁面等に拘束されている場合。この時は，端面位置で捩り角がゼロとなる。

$$\theta = 0 \quad \text{at 端面位置} \quad (31)$$

以上の場合，端面位置が定常波の節 (node) となる。

(自由端，開放端) これは下記の場合に対応する。

- (1) 弾性体またはコイルバネの縦振動で端面が拘束されておらず，自由に動ける場合。この時は，端面位置で応力が生じないため，ひずみがゼロとなる。つまり境界条件は次式となる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{at 端面位置} \quad (32)$$



- (2) 気柱の振動で端面が大気に開放されている場合。この時は、端面位置で  $p = p_0 = \text{const.}$  で体積ひずみなし、つまり式 (32) が成立する。管楽器の先端は通常は大気に開放されているので開放端である。吹口も口内に開放されているので開放端であるが、クラリネット等 (一部の木管楽器) では閉鎖端となり、1 オクターブ高い音が出る。
- (3) 棒の捩り振動で棒の端面が拘束されておらず、自由に回転できる場合。この時は、端面位置でせん断応力が生じないため、せん断ひずみがゼロとなる。

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad \text{at 端面位置} \quad (33)$$

以上の場合、端面位置では変位  $u$  または 捩れ角  $\theta$  が最大となり、定常波の腹 (loop) となる。

(端面に付加質量を持つ棒) 軸の先端に更にある大きさの質量が取り付けられており、縦振動または捩り振動を生じるという場合も多い。付加質量が無視できれば連続体の振動、付加質量の効果が支配的であれば 1 自由度系の振動として扱えばよい。その何れでも近似し難い場合、次節で説明する。

## 23 弦, 棒および気柱の振動 (2/2)

### 23.1 端面に付加質量を持つ棒

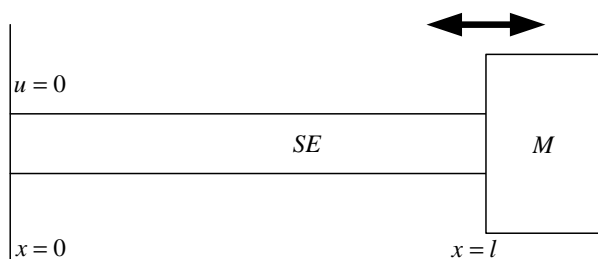


Fig. 3 付加質量を持つ棒

弾性体の端面 (位置  $x = l$  の位置) に質量  $M$  の剛体に取り付けられている場合を考える。弾性体の運動方程式と左端での境界条件は次式である。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (34)$$

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (35)$$

$$u = 0 \quad \text{at} \quad x = 0 \quad (36)$$

また, 重りの運動方程式は

$$M \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{x=l} = -T$$

であり, 弾性体右端での張力と歪の関係より

$$T = S\sigma = SE \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l}$$

である。つまり右端の境界条件は次式となる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{M}{SE} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{at} \quad x = l \quad (37)$$

境界条件 (36) を満たす解は

$$u = Ae^{i\omega t} \sin \frac{\omega x}{c} \quad (38)$$

である。これが  $x = l$  の境界条件 (37) を満たすことより,

$$A \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega l}{c} - \frac{M}{SE} \omega^2 A \sin \frac{\omega l}{c} = 0$$

式 (35) を用いて整理して

$$\tan \frac{\omega l}{c} = \frac{SE}{Mc\omega} = \frac{SE}{Mc} \frac{c}{\omega l} = \frac{SEl}{Mc^2} \frac{c}{\omega l} = \frac{\rho Sl}{M} \frac{c}{\omega l}$$

または

$$\tan \theta = \frac{\mu}{\theta} \quad (39)$$

ただし,

$$\theta = \frac{\omega l}{c} = \frac{l}{c/\omega} = 2\pi \frac{l}{\lambda} \quad (40)$$

$$\mu = \frac{\rho S l}{M} = \frac{m_s}{M} \quad (41)$$

$\mu$  は棒の質量と付加質量との比である。式 (39) の根は、曲線  $f_1 = \tan \theta$  と曲線  $f_2 = \mu/\theta$  との交点として求まる (Fig. 4)。交点を  $\theta_n$  とすると、式 (40) より固有振動数は

$$\omega_n = \frac{c}{l} \theta_n$$

として求まる。

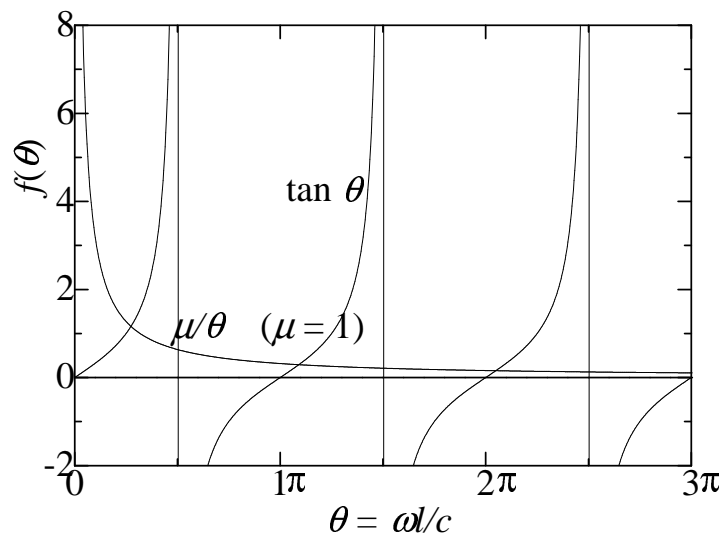


Fig. 4 付加質量を持つ棒の固有振動数

数値計算で求めた  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  の値を、Fig. 5 および Table 2 に示す。また、振幅を表す固有関数  $X(x)$  を Fig.6 に示す。

$\mu \rightarrow \infty (M \rightarrow 0)$  の場合 このとき、 $\theta_n \rightarrow (n - \frac{1}{2})\pi$  となるので、

$$\omega_n = (n - \frac{1}{2})\pi \frac{c}{l}$$

となる。これは、付加質量のない場合 (28) に一致する。

$\mu \rightarrow 0 (M \rightarrow \infty)$  の場合 このとき、 $\theta_1 \rightarrow 0$  となるので、 $\tan \theta_1 \simeq \theta_1$  と近似して、式 (39) は

$$\theta_1 \simeq \frac{\mu}{\theta}$$

Table 2  $\tan\theta = \mu/\theta$  の解

$\mu$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\mu$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$
0.0010	0.0316	3.1419	6.2833	4.5	1.2913	3.9873	6.8635
0.0020	0.0447	3.1422	6.2835	5.0	1.3138	4.0336	6.9096
0.005	0.0707	3.1432	6.2840	5.5	1.3330	4.0748	6.9525
0.010	0.0998	3.1448	6.2848	6.0	1.3496	4.1116	6.9924
0.020	0.1410	3.1480	6.2864	7.0	1.3766	4.1746	7.0640
0.050	0.2218	3.1574	6.2911	8.0	1.3978	4.2264	7.1263
0.10	0.3111	3.1731	6.2991	9.0	1.4149	4.2694	7.1806
0.20	0.4328	3.2039	6.3149	10	1.4289	4.3058	7.2281
0.40	0.5932	3.2636	6.3461	12	1.4505	4.3636	7.3070
0.60	0.7051	3.3204	6.3770	14	1.4664	4.4074	7.3695
0.80	0.7910	3.3744	6.4074	16	1.4786	4.4416	7.4198
1.0	0.8603	3.4256	6.4373	18	1.4883	4.4690	7.4610
1.2	0.9179	3.4742	6.4667	20	1.4961	4.4915	7.4954
1.4	0.9666	3.5201	6.4955	25	1.5105	4.5330	7.5603
1.6	1.0084	3.5636	6.5237	30	1.5202	4.5615	7.6057
1.8	1.0449	3.6047	6.5513	40	1.5325	4.5979	7.6647
2.0	1.0769	3.6436	6.5783	50	1.5400	4.6203	7.7012
2.2	1.1052	3.6804	6.6047	60	1.5451	4.6353	7.7259
2.5	1.1422	3.7318	6.6431	80	1.5514	4.6543	7.7573
2.7	1.1638	3.7639	6.6679	100	1.5553	4.6658	7.7764
3.0	1.1925	3.8088	6.7040	200	1.5630	4.6890	7.8149
3.5	1.2323	3.8761	6.7609	500	1.5677	4.7030	7.8383
4.0	1.2646	3.9352	6.8140	1000	1.5692	4.7077	7.8461

つまり

$$\omega_1 = \frac{c}{l}\theta_1 \simeq \frac{c}{l}\sqrt{\mu} = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\sqrt{\frac{\rho Sl}{M}} = \sqrt{\frac{ES}{Ml}} = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

ただし,  $k = ES/l$  はばね定数である。これは, ばねの質量を無視した 1 自由度系の結果に一致している。

一方, 2 次以上の固有振動数は,  $\mu \rightarrow 0$  の時,

$$\theta_n \simeq (n-1)\pi$$

となるので, 固有振動数は次式となる。

$$\omega_n = \theta_n \frac{c}{l} \simeq (n-1)\pi \frac{c}{l} = (n-1)\pi \frac{1}{l} \sqrt{\frac{kl^2}{m_s}} = (n-1)\pi \sqrt{\frac{k}{m_s}}$$

これは両端固定の場合の  $(n-1)$  次の固有振動数に一致している。

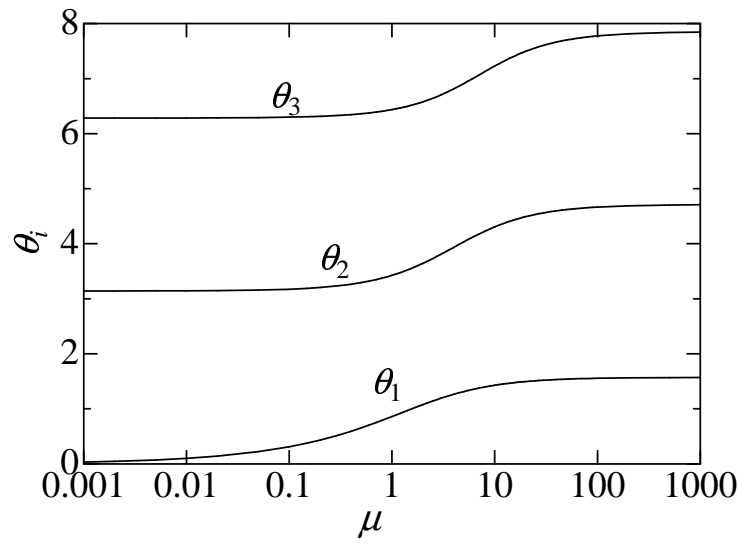


Fig. 5 解  $\theta_i$

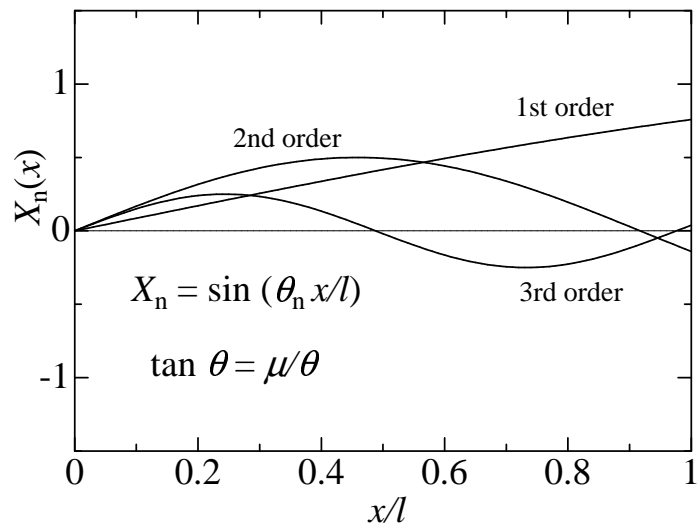


Fig. 6 振幅関数  $X(x)$

つまり、高次モードの振動では、付加質量は固定端となり、弾性体（ばね）だけが振動する。これをばねのサージングという。

## 23.2 音と音階 (参考)

音は空気の振動を聴覚でとらえたものである。振動数が変われば、音の高さ (pitch) が変わる。弦の振動から作り出される音は、 $\pi c/l$  の整数倍の振動数の音が重ね合わされたものである。基本振動数の整数倍の振動数の波を高調波という。高調波の含まれ方により、音色が異なる。

基本振動数の比が  $1:2$  となる 2 つの音は、音程差 1 オクターブ (8 度) に相当する。 $1:4, 1:8$  であれば、それぞれ、2 オクターブ、3 オクターブの音程差である。

振動数の比が小さい整数の比となる 2 種類の音は、協和音となり、そうでない 2 種類の音は不協和音となる。協和音をもとにしてつくられた音階が自然音階 (純正律音階) と呼ばれる。純正律音階は以下のような手順で作られる。

- (1) 振動数比  $2/1$  はオクターブの音程 (ド-ド) に対応する。
- (2) 振動数比  $3/2$  は完全 5 度の音程 (ド-ソ) に対応する。
  - (a) 完全 5 度とオクターブ (ソ-ド) の差は振動数比  $2/(3/2) = 4/3$  に対応し、これは完全 4 度の音程 (ド-ファ) である。
  - (b) 完全 4 度と完全 5 度 (ファ-ソ) の差は振動数比  $(3/2)/(4/3) = 9/8$  に対応し、これは長 2 度の音程 (ド-レ) である。
- (3) 振動数比  $5/4$  は長 3 度の差 (ド-ミ) に対応する。
  - (a) 長 3 度とオクターブ (ミ-ド) の差は振動数比  $2/(5/4) = 8/5$  に対応し、これは短 6 度の音程 (ド-♭ラ) である。
  - (b) 長 3 度と完全 5 度 (ミ-ソ) の差は振動数比  $(3/2)/(5/4) = 6/5$  に対応し、これは短 3 度の音程 (ド-♭ミ) である。
  - (c) 短 3 度とオクターブ (ミ-ド) の差は振動数比  $2/(6/5) = 5/3$  に対応し、これは長 6 度の音程 (ド-ラ) である。
  - (d) 長 3 度と完全 4 度 (ミ-ファ) の差は振動数比  $(4/3)/(5/4) = 16/15$  に対応し、これは短 2 度の音程 (ド-レ♭) である。
  - (e) 短 2 度とオクターブ (レ♭-ド) の差は振動数比  $2/(16/15) = 15/8$  に対応し、これは長 7 度の音程 (ド-シ) である。

この音階 (12 音階) を表 3 に示す。

八長調の和音はド-ミ-ソ、ファ-ラ-ド、ソ-シ-レであり、振動数比はいずれも  $4:5:6$  (長 3 度-完全 5 度) となっている。一方、イ短調の和音はラ-ド-ミ、レ-ファ-ラ、ミ-ソ-シであり、振動数比は、それぞれ、 $10:12:15$ 、 $10:12:15$ 、 $10:12:15$  (短 3 度-完全 5 度) となり、ほぼ整数比になっている。

純正律音階では半音 (ミ-ファ、シ-ド) はいずれも  $16/15$  となっているが、全音は、ド-レ、ファ-ソ 間が  $9/8$  であり、レ-ミ、ラ-シ 間が  $10/9$  となり、2 種類の全音 (長 2 度) が生じる。このため、転調するとこの音階が少し崩れる場合が生じる。この崩れをなくするには、オクターブ間を等比数列で分割して、半音を振動数比  $1:2^{1/12}$ 、全音を振動数比  $1:2^{1/6}$  とすればよい。このようにしてできた音階を平均率音階といい、今日広く用いられている。和音の整数比の関係は少し崩れるが、自由に転調できる。

種々の弦楽器の解放弦は表 4 のようになっている。完全 5 度 ( $2:3$ ) または完全 4 度 ( $3:4$ ) の音程を基本にしており、これを利用して調律する。

Table 3 12音階

音程		1度	2度		3度		4度	5度		6度		7度		8度
音階		Do C	Re $\flat$ D $\flat$	Re D	Mi $\flat$ E $\flat$	Mi E	Fa F	Sol $\flat$ G $\flat$	Sol G	La $\flat$ A $\flat$	La A	Si $\flat$ B $\flat$	Si B	Do C
純 正 律	振動数	264Hz	277	297	311	330	352	370	396	415	440	466	495	528
	振動数 の比	1		9/8		5/4	4/3		3/2		5/3		15/8	2
		1	1.067	1.125	1.2	1.25	1.333		1.5	1.6	1.667		1.875	2
平 均 律	振動数	261.7Hz	277.2	293.7	311.2	329.7	349.2	370.0	392.0	415.3	440	466.2	493.9	523.3
	振動数 の比	1	2 <sup>1/12</sup>	2 <sup>2/12</sup>	2 <sup>3/12</sup>	...							...	2
		1	1.059	1.122	1.189	1.260	1.335	1.414	1.498	1.587	1.682	1.782	1.888	2

Table 4 弦楽器の解放弦

	第6弦	第5弦	第4弦	第3弦	第2弦	第1弦	音程
バイオリン	—	—	g'	d''	a''	e'''	完全5度
ビオラ	—	—	c'	g'	d''	a''	完全5度
チェロ	—	—	c	g	d'	a'	完全5度
コントラバス	—	—	E <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	D	G	完全4度
ギター	e ミ	a ラ	d' レ	g' ソ	b' シ	e'' ミ	完全4度 (第1-2弦間を除く)
三味線(本調子)	—	—	—	a	d'	a'	4度-5度 (絶対音階不詳)
"(二上り調子)	—	—	—	a	e'	a'	5度-4度( ")
"(三下り調子)	—	—	—	a	d'	g'	4度-4度( ")

## 24 はりの曲げ振動 (1/2)

### 24.1 はりに働く力と変形

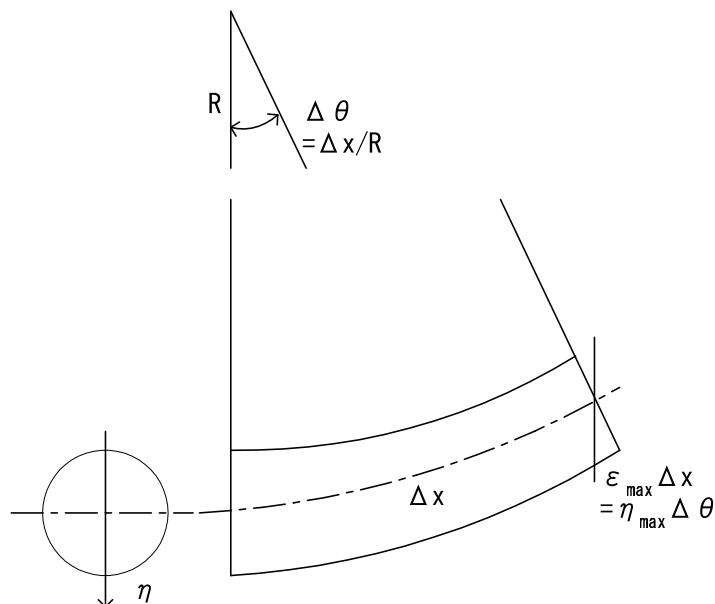


Fig. 7 はりの変形

(はりにおける力と変形)

はりに横荷重が加わる時，はりは曲がる。まず，この曲がりと部材の歪の関係を求める。

はりが曲がると，曲がった外側は伸び歪を生じ，内側は圧縮歪を生じる。はりの断面内で伸びも縮みもしない点 (中立点) を結ぶと，荷重に垂直な直線となる。はりに軸荷重が加わっておらず，かつ歪が弾性変形範囲内である場合は，中立点は断面の図心を通る。

Fig. 7 において，はりが変形して曲がり，その中立点を結ぶ曲線の曲率半径が  $R$  となったとする。はりの微小長さ  $\Delta x$  は図のように変形して，

$$\Delta\theta = \frac{\Delta x}{R}$$

となる。はりの断面内の縦歪み (normal strain) は中立軸からの距離  $\eta$  に比例し，

$$\frac{\epsilon}{\eta} = \frac{\epsilon_{max}}{\eta_{max}} = \frac{\Delta\theta}{\Delta x} = \frac{1}{R} \quad (42)$$

と表される。曲率半径  $R$  は中立曲線の座標  $u$  (または  $y$ ) を用いて

$$\frac{1}{R} = -\frac{\frac{d^2u}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \cong -\frac{d^2u}{dx^2} \quad (43)$$



従って、曲げ変形に伴う歪みおよび応力は次式で表される。

$$\epsilon = \left(-\frac{d^2u}{dx^2}\right)\eta \quad (44)$$

$$\sigma = E\epsilon = E\left(-\frac{d^2u}{dx^2}\right)\eta \quad (45)$$

また、この応力によるモーメント（曲げモーメント）は次式となる。

$$M = \int_S \sigma \eta dS = E\left(-\frac{d^2u}{dx^2}\right) \int_S \eta^2 dS = -EI \frac{d^2u}{dx^2}$$

従って、次式が成立する。

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (46)$$

## 24.2 はりの運動方程式

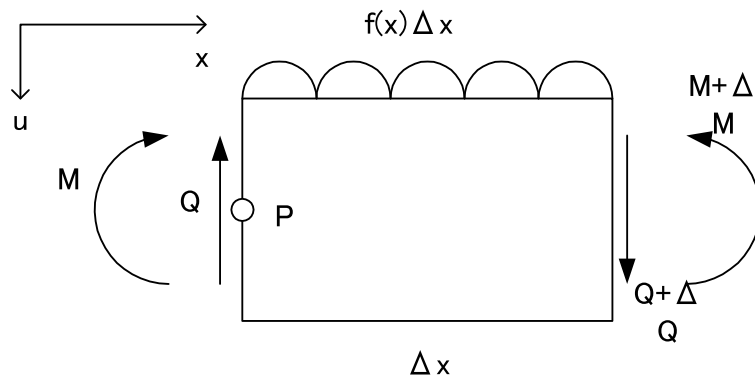


Fig. 8 はりの関係式

図 8 に示す微小部分に働く上下方向の力のつり合いを考える。

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (Q + \Delta Q) - Q + f(x, t) \Delta x$$

つまり、

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\Delta Q}{\Delta x} = f(x, t)$$

ここで、 $f(x, t)$  は、はりに作用する単位長さ当たりの強制外力（下向きを正）、 $\rho$  は、はり材料の密度、 $S$  は、はりの断面積である。

$\Delta x \rightarrow \infty$  の極限では次式が成立する。

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial Q}{\partial x} = f(x, t) \quad (47)$$

はりの曲げ振動では、はりの上下運動に比べて回転運動は小さく、その回転角加速度は無視されるのが普通である。この時、はりの微小部分に働く力のモーメントのつり合いから、次の関係式が成立する。

$$M + \Delta M - M - f(x) \Delta x \times \frac{1}{2} \Delta x - (Q + \Delta Q) \times \Delta x = 0$$

従って

$$\frac{\Delta M}{\Delta x} = Q + \Delta Q + \frac{1}{2}f(x)\Delta x$$

$\Delta x \rightarrow \infty$  の極限では，次式が成立する。

$$\frac{dM}{dx} = Q \quad (48)$$

式 (47) の運動方程式の第 2 項に式 (48) の  $Q$  を用いて，さらに，力と変形の関係式 (46) を用いると，運動方程式は次式となる。

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = f(x, t) \quad (49)$$

断面が一様なはりの場合は次式となる\*1。

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f(x, t) \quad (50)$$

---

\*1  $f(x, t) = 0$  として，式 (50) の解が  $u = Ae^{i(kx - \omega t)}$  の形の解を持つとして，これを代入すると，次の分散関係式が得られる。

$$-\omega^2 \rho S + k^4 EI = 0$$

これより，

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} k = \left( \frac{EI}{\rho S} \right)^{1/4} \omega^{1/2}$$

つまり，はり内を伝わる曲げの波動の伝播速度  $c$  は，波数  $k$  ( $= 2\pi/(\text{波長})$ )，または角振動数  $\omega$  に依存して変化する（分散性がある）ことがわかる。

## 25 はりの曲げ振動 (2/2)

### 25.1 一様断面はりの自由曲げ振動

ここでは一様断面のはりの自由振動を考える。

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad (51)$$

次の形の解を求める。

$$u(x, t) = X(x)e^{i\omega t} \quad (52)$$

これを式 (51) に用いて,

$$-\omega^2 \rho S X + EI \frac{d^4 X}{dx^4} = 0$$

つまり次式となる。

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - \alpha^4 X = 0 \quad (53)$$

$$\alpha^4 = \frac{\rho S}{EI} \omega^2 \quad (54)$$

この式は  $\lambda$  をある定数として,

$$X = e^{\lambda x}$$

の形の解を持つ。  $\lambda$  は次式より求まる。

$$\lambda^4 - \alpha^4 = 0$$

つまり,

$$\lambda = \pm i\alpha, \quad \pm\alpha$$

これより,  $X(x)$  は次の形となる。

$$X = B_1 e^{i\alpha x} + B_2 e^{-i\alpha x} + B_3 e^{\alpha x} + B_4 e^{-\alpha x}$$

または

$$X = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + C_3 \sinh \alpha x + C_4 \cosh \alpha x \quad (55)$$

ただし

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} & \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} & \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

である。

境界条件から,  $\omega$  の固有値  $\omega_n$  (固有振動数) および  $C_1, C_2, C_3, C_4$  の比 (振動モード) が定まる。

単純支持はり (simple beam) この場合の境界条件は、変位および曲げモーメントが両端で 0 であることから、次式で表される。

$$u = 0 \quad \text{at } x = 0 \quad (56)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{at } x = 0 \quad (57)$$

$$u = 0 \quad \text{at } x = l \quad (58)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{at } x = l \quad (59)$$

式 (56) ~ (59) に式 (55) を用いて、

$$\left. \begin{array}{l} C_2 + C_4 = 0 \\ -C_2 + C_4 = 0 \\ \sin \alpha l C_1 + \cos \alpha l C_2 + \sinh \alpha l C_3 + \cosh \alpha l C_4 = 0 \\ -\sin \alpha l C_1 - \cos \alpha l C_2 + \sinh \alpha l C_3 + \cosh \alpha l C_4 = 0 \end{array} \right\} \quad (60)$$

上式は同次連立方程式であるから、 $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$  つまり振動しないという解 (自明の解) を持つ。 $\alpha l$  がある条件を満たして係数行列式が 0 となる場合には、自明の解以外の解を持ち、 $C_1 : C_2 : C_3 : C_4$  の比が求まる。

式 (60) の第 1 式と第 2 式から、

$$C_2 = C_4 = 0 \quad (61)$$

この時、第 3 式と第 4 式は次式となる。

$$\begin{aligned} \sin \alpha l C_1 + \sinh \alpha l C_3 &= 0 \\ -\sin \alpha l C_1 + \sinh \alpha l C_3 &= 0 \end{aligned}$$

$C_1 = C_3 = 0$  とならないためには、

$$\Delta = 2 \sin \alpha l \sinh \alpha l = 0$$

つまり、

$$\sin \alpha l \sinh \alpha l = 0$$

でなければならないが、 $\alpha l > 0$  では  $\sinh \alpha l > 0$  であるから、

$$\sin \alpha l = 0$$

つまり

$$\alpha = \alpha_n = \frac{n\pi}{l} \quad (62)$$

でなければならない。またこの時

$$C_3 = 0 \quad (63)$$

となる。式 (61)(62)(63) を用いて、

$$X(x) = C_1 \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (64)$$

従って、

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} (C_1' \sin \omega_n t + C_2' \cos \omega_n t) \quad (65)$$

係数  $C_1$  は  $C'_1$  および  $C'_2$  に含めており、それらは、初期条件より定まる。 $\omega_n$  の値は、式 (54) に式 (62) を用いて、

$$\omega = \omega_n = \alpha_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (66)$$

である。

片持はり (cantilever) この場合の境界条件は、次式で表される。

$$X = 0 \quad \text{at} \quad x = 0 \quad (67)$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 0 \quad \text{at} \quad x = 0 \quad (68)$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0 \quad \text{at} \quad x = l \quad (69)$$

$$\frac{d^3 X}{dx^3} = 0 \quad \text{at} \quad x = l \quad (70)$$

第 4 式は端点でせん断応力がゼロであることを表している。これらに式 (55) を用いて、

$$\left. \begin{array}{l} C_2 + C_4 = 0 \\ -\sin \alpha l C_1 + \sinh \alpha l C_3 = 0 \\ -\cos \alpha l C_1 + \sin \alpha l C_2 + \cosh \alpha l C_3 + \sinh \alpha l C_4 = 0 \end{array} \right\} \quad (71)$$

上の第 1 式と第 2 式から、

$$C_3 = -C_1$$

$$C_4 = -C_2$$

これを、第 3 式、第 4 式に用いて、

$$-(\sin \alpha l + \sinh \alpha l)C_1 - (\cos \alpha l + \cosh \alpha l)C_2 = 0 \quad (72)$$

$$-(\cos \alpha l + \cosh \alpha l)C_1 + (\sin \alpha l - \sinh \alpha l)C_2 = 0 \quad (73)$$

この式が自明の解 ( $C_1 = C_2 = 0$ ) 以外の解を持つ条件より、

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} -(\sin \alpha l + \sinh \alpha l) & -(\cos \alpha l + \cosh \alpha l) \\ -(\cos \alpha l + \cosh \alpha l) & \sin \alpha l - \sinh \alpha l \end{vmatrix} \\ &= -(\sin \alpha l + \sinh \alpha l)(\sin \alpha l - \sinh \alpha l) - (\cos \alpha l + \cosh \alpha l)^2 \\ &= -(\sin^2 \alpha l - \sinh^2 \alpha l) - (\cos^2 \alpha l + 2 \cos \alpha l \cosh \alpha l + \cosh^2 \alpha l) \\ &= -2(1 + \cos \alpha l \cosh \alpha l) \\ &= 0 \end{aligned}$$

つまり、

$$\cos \alpha l \cosh \alpha l + 1 = 0 \quad (74)$$

式 (74) の根は、曲線

$$f_1(\alpha l) = \cos \alpha l$$

と曲線

$$f_2(\alpha l) = -\frac{1}{\cosh \alpha l}$$

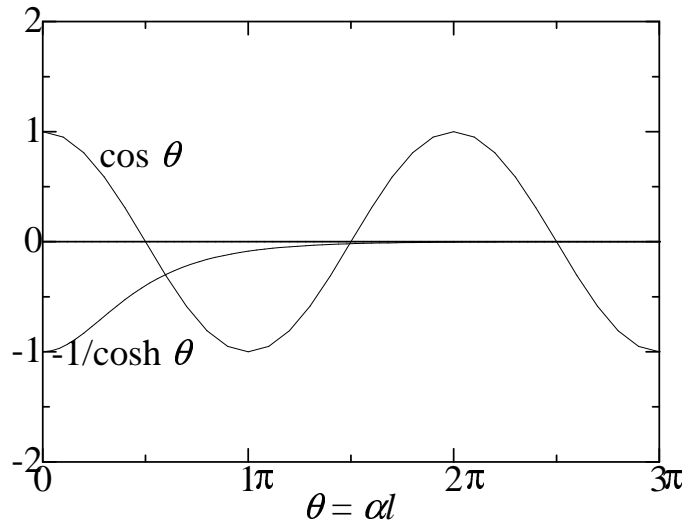


Fig. 9 片持りの固有振動数

の交点として求まる (Fig. 9)。この  $\alpha$  を  $\alpha_n$  と表す。

この時, 式 (72),(73) より

$$\frac{C_2}{C_1} = -\frac{\sin \alpha_n l + \sinh \alpha_n l}{\cos \alpha_n l + \cosh \alpha_n l} = \frac{\cos \alpha_n l + \cosh \alpha_n l}{\sin \alpha_n l - \sinh \alpha_n l} \quad (75)$$

となり, これを用いて, 振幅関数 (規準関数)  $X(x)$  は次式で表される。

$$\begin{aligned} X_n(x) &= C_1(\sin \alpha_n x - \sinh \alpha_n x) + C_2(\cos \alpha_n x - \cosh \alpha_n x) \\ &= C_1 \left[ (\sin \alpha_n x - \sinh \alpha_n x) - \frac{\sin \alpha_n l + \sinh \alpha_n l}{\cos \alpha_n l + \cosh \alpha_n l} (\cos \alpha_n x - \cosh \alpha_n x) \right] \\ &= C_1' \left( \frac{\sin \alpha_n x - \sinh \alpha_n x}{\sin \alpha_n l + \sinh \alpha_n l} - \frac{\cos \alpha_n x - \cosh \alpha_n x}{\cos \alpha_n l + \cosh \alpha_n l} \right) \end{aligned} \quad (76)$$

または

$$\begin{aligned} X_n(x) &= C_1 \left[ (\sin \alpha_n x - \sinh \alpha_n x) + \frac{\cos \alpha_n l + \cosh \alpha_n l}{\sin \alpha_n l - \sinh \alpha_n l} (\cos \alpha_n x - \cosh \alpha_n x) \right] \\ &= C_1'' \left( \frac{\sin \alpha_n x - \sinh \alpha_n x}{\cos \alpha_n l + \cosh \alpha_n l} + \frac{\cos \alpha_n x - \cosh \alpha_n x}{\sin \alpha_n l - \sinh \alpha_n l} \right) \end{aligned} \quad (77)$$

$\omega_n$  の値は, 式 (54) より,

$$\omega = \omega_n = \alpha_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (78)$$

である。

## 25.2 種々のはりの曲げ振動 (まとめ)

運動方程式は共通である。

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$$

または  $u = X(x)e^{i\omega t}$  と表して,

$$\frac{d^4 u}{dx^4} - \alpha^4 X = 0 \quad \text{ただし} \quad \alpha^4 = \frac{\rho S}{EI} \omega^2$$

種々のはりの境界条件, 振動数方程式, 固有振動数および振幅関数を表 5 に示す。種類の欄のローラとは, はりの端部が元の傾斜を保ったまま自由に変位できるよう拘束されたはりであることを意味する。

Table 5 種々のはりの曲げ振動

種類	境界条件	振動数方程式	振動数係数 $\alpha_n l$ $\omega_n = \frac{(\alpha_n l)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$	振幅関数 $X_n(x)$
両端固定	$X(0) = X'(0) = 0$ $X(l) = X'(l) = 0$	$\cos \alpha l \cosh \alpha l - 1 = 0$	4.730, 7.853, 10.996, 14.137, ...	$-\frac{\sinh \alpha_n x - \sin \alpha_n x}{\sinh \alpha_n l - \sin \alpha_n l}$ $+\frac{\cosh \alpha_n x - \cos \alpha_n x}{\cosh \alpha_n l - \cos \alpha_n l}$
一端固定 他端支持	$X(0) = X'(0) = 0$ $X(l) = X''(l) = 0$	$\tan \alpha l - \tanh \alpha l = 0$	3.927, 7.069, 10.210, 13.352, ...	$-\frac{\sinh \alpha_n x - \sin \alpha_n x}{\sinh \alpha_n l - \sin \alpha_n l}$ $+\frac{\sin \alpha_n l}{\cosh \alpha_n x - \cos \alpha_n x}$ $+\frac{\cos \alpha_n l}{\sinh \alpha_n x - \sin \alpha_n x}$
一端固定 他端ローラ	$X(0) = X'(0) = 0$ $X'(l) = X'''(l) = 0$	$\tan \alpha l + \tanh \alpha l = 0$	2.365, 5.498, 8.639, 11.781, ...	$-\frac{\sinh \alpha_n x - \sin \alpha_n x}{\cosh \alpha_n x - \cos \alpha_n x}$ $+\frac{\sin \alpha_n l}{\sinh \alpha_n x - \sin \alpha_n x}$
一端固定 他端自由	$X(0) = X'(0) = 0$ $X''(l) = X'''(l) = 0$	$\cos \alpha l \cosh \alpha l + 1 = 0$	1.875, 4.694, 7.855, 10.996, ...	$-\frac{\sinh \alpha_n x - \sin \alpha_n x}{\sinh \alpha_n l + \sin \alpha_n l}$ $+\frac{\cosh \alpha_n x - \cos \alpha_n x}{\cosh \alpha_n l + \cos \alpha_n l}$
両端支持	$X(0) = X''(0) = 0$ $X(l) = X''(l) = 0$	$\sin \alpha l = 0$	$n\pi$	$\sin \alpha_n x$
一端支持 他端ローラ	$X(0) = X''(0) = 0$ $X'(l) = X'''(l) = 0$	$\cos \alpha l = 0$	$(n - 1/2)\pi$	$\sin \alpha_n x$
一端支持 他端自由	$X(0) = X''(0) = 0$ $X''(l) = X'''(l) = 0$	$\tan \alpha l - \tanh \alpha l = 0$	3.927, 7.069, 10.210, 13.352, ...	$\frac{\sin \alpha_n x}{\sin \alpha_n l} + \frac{\sinh \alpha_n x}{\sinh \alpha_n l}$
両端 ローラ	$X'(0) = X'''(0) = 0$ $X'(l) = X'''(l) = 0$	$\sin \alpha l = 0$	$n\pi$	$\cos \alpha_n x$
一端ローラ 他端自由	$X'(0) = X'''(0) = 0$ $X''(l) = X'''(l) = 0$	$\tan \alpha l + \tanh \alpha l = 0$	2.365, 5.498, 8.639, 11.781, ...	$\frac{\cos \alpha_n x}{\cos \alpha_n l} + \frac{\cosh \alpha_n x}{\cosh \alpha_n l}$
両端自由	$X''(0) = X'''(0) = 0$ $X''(l) = X'''(l) = 0$	$\cos \alpha l \cosh \alpha l - 1 = 0$	4.730, 7.853, 10.996, 14.137, ...	$-\frac{\sinh \alpha_n x + \sin \alpha_n x}{\sinh \alpha_n l - \sin \alpha_n l}$ $+\frac{\cosh \alpha_n x + \cos \alpha_n x}{\cosh \alpha_n l - \cos \alpha_n l}$

## 26 回転軸の振動

### 26.1 円板を有する回転軸

回転軸のたわみとつりあい 回転軸に円板が取り付けられ、共に回転する場合、円板の重心が多少なりとも回転軸から偏心していると振動の原因になる。この時の円板と軸の挙動について考える。

円板の質量を  $M$ 、回転軸中心に対する円板重心の偏心量を  $\epsilon$  とする。この軸が角速度  $\omega$  で回転する時、円板取り付け位置での軸のたわみ量を  $\delta$  とする。ここでは、簡単のために、軸のたわみは円板重心の偏心方向と同一方向であると仮定し、同一向きであれば正、逆向きであれば負の数で表す。

この時、回転円板に働く遠心力と軸の曲げ剛性による復元力とが釣り合うので、次式が成立する。

$$M(\delta + \epsilon)\omega^2 = k\delta$$

ただし、 $k$  は円板位置に力を加えたときの軸（はり）のばね定数である。これより、

$$\delta = \frac{M\epsilon\omega^2}{k - M\omega^2} = \frac{\epsilon}{\frac{k}{M\omega^2} - 1} \quad (79)$$

上式によるたわみ量  $\delta$  の変化を図 10 に示す。

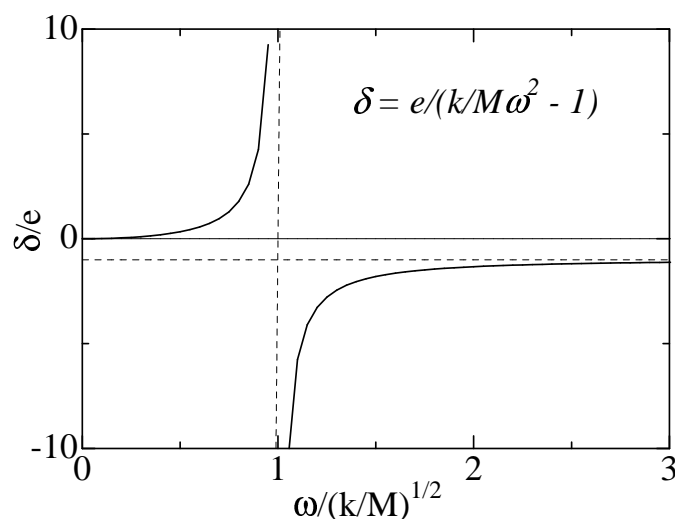


Fig. 10 回転円板のつりあい

たわみ量  $\delta$  は  $\omega = 0$  では当然 0 であるが、 $\omega$  と共に徐々に増加し、 $\omega \rightarrow \sqrt{k/M}$  の時、無限大となる。この共振する回転数は回転軸の危険速度と呼ばれる。その角速度は、回転しないはりと円板が上下に曲げ振動する時の固有振動数に一致することがわかる。

さらに回転数が増して、 $\omega > \sqrt{k/M}$  となると、軸のたわみ  $\delta$  は円板の偏心量と逆方向となり、 $\omega$  の増大と共に減少して、やがて  $-\epsilon$  に漸近する。たわみ量が  $-\epsilon$  となった際には、円板の重心は回転軸の回転中心と一致することとなり、円板に働く遠心力がゼロとなって滑らかな回転となる。

回転円板等の集中質量を有するはり（軸）の曲げ振動を正確に解析するのは、一般に複雑となり実用的ではない。以下に、その近似解法のいくつかを紹介する。



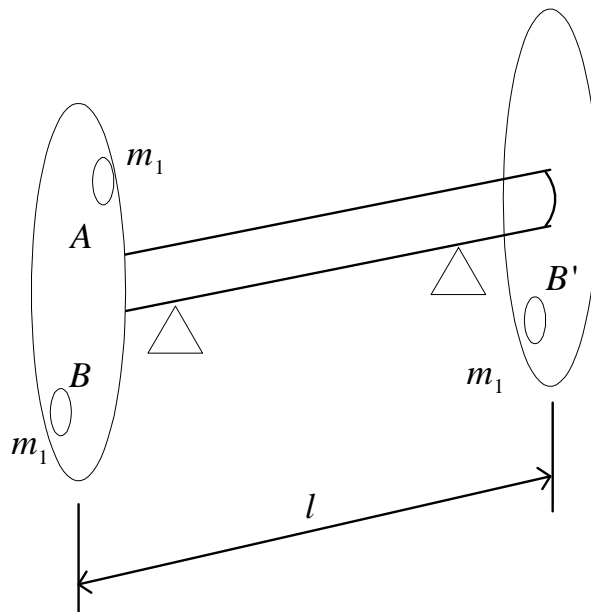


Fig. 11 動的つりあい

回転体の静つりあいと動つりあい(参考) 回転体の重心と回転軸とが完全に一致しないとは、例えば図 11 において、完全につりあっている回転体の A の位置に余分に質量  $m_1$  を付加したことと同等である。この回転体を回転させると、 $m_1 r \omega^2$  の遠心力が生じ、これが不釣合い力となって振動の原因となる。このように回転体の重心が回転軸に位置していない時、静的不釣合いの状態にあると言う。これをつりあわせるには、A の軸対称となる位置 B に同じく  $m_1$  の質量を付加すればよい。

B の位置の代わりに 例えば図の B' の位置に質量  $m_1$  を付加しても、この回転体の重心は回転軸上に位置するので、静的つりあい状態となる。しかし、この場合は回転時に不釣合い偶力  $m_1 r \omega^2 \times l$  を生じ、振動の原因となる。このような場合、動的不釣り合いの状態にあると言う。

## 26.2 Rayleigh 法

振動している系では、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーが相互に入れ替わり、減衰が無視できる場合には両者の和が一定に保たれる。速度が 0 となる時、変位が最大となり、全てのエネルギーはポテンシャルエネルギーとなる。また、変位が 0 となる時、速度が最大となり、全てのエネルギーは運動エネルギーとなる。従って、ポテンシャルエネルギーの最大値と運動エネルギーの最大値は等しい。このことを用いて、固有振動数を求める方法をエネルギー法と呼ぶ。連続体の振動において、振動モード  $X(x)$  を適当に仮定した上で、このエネルギー法を適用する方法を、特に Rayleigh 法と呼ぶ。

Rayleigh 法によるばねの等価質量 長さ  $l$ 、質量  $m_s$ 、ばね定数  $k$  のばねの一端に質量  $M$  の重りが取り付けられた振動系については、既に 23.1 節で検討した。Rayleigh 法の説明のために、これを再度取り上げて、ばねの質量  $m_s$  の影響をを検討してみる。

重りの振幅を  $u_0$  として、各時刻でのばね各部の変位を次式で表す。

$$u(t, x) = u_0 \frac{x}{l} \sin \omega t$$

この時、ばねに蓄えられる歪みエネルギー  $U$  は、

$$U = \frac{1}{2} k u^2 = \frac{1}{2} k u_0^2 \sin^2 \omega t$$

であるので、その最大値は次式となる。

$$U_{max} = \frac{1}{2} k u_0^2$$

一方、ばね各部の速度は  $\dot{u}(t, x) = \omega u_0 (x/l) \cos \omega t$  であるから、ばねと重りを合わせた運動エネルギー  $T$  は

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M \{\dot{u}(t, l)\}^2 + \int_0^l \frac{1}{2} \frac{m_s dx}{l} \{\dot{u}(t, x)\}^2 = \frac{1}{2} M (\omega u_0 \cos \omega t)^2 + \int_0^l \frac{1}{2} \frac{m_s}{l} \left( \omega u_0 \frac{x}{l} \cos \omega t \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 u_0^2 \left( M + \frac{m_s}{l^3} \int_0^l x^2 dx \right) \cos^2 \omega t = \frac{1}{2} \omega^2 u_0^2 \left( M + \frac{1}{3} m_s \right) \cos^2 \omega t \end{aligned}$$

となるので、その最大値は

$$T_{max} = \frac{1}{2} \omega^2 u_0^2 \left( M + \frac{1}{3} m_s \right)$$

となる。

$U_{max} = T_{max}$  と置いて、次式を得る。

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M + \frac{1}{3} m_s}} \quad (80)$$

つまり、ばねの質量の  $1/3$  を重りに付加すれば、ばねと重りの  $1$  自由度系に等しくなる。

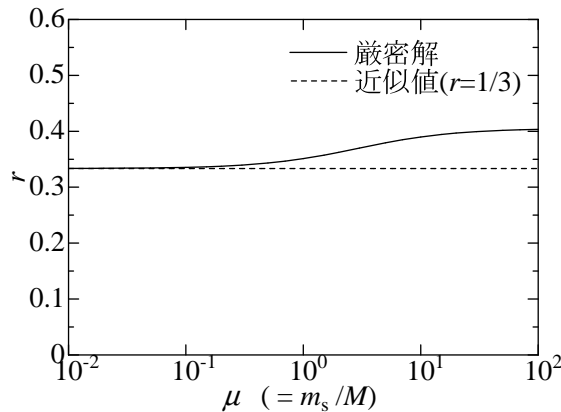


Fig. 12 ばねの等価質量係数  $r$

正確な固有振動数は前節の式 (39) の  $\theta_1$  を用いて、次式で与えられる。

$$\omega_1 = \theta_1 \sqrt{\frac{k}{m_s}}$$

少し変形して，

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_s/\theta_1^2}} = \sqrt{\frac{k}{M + (m_s/\theta_1^2 - M)}} = \sqrt{\frac{k}{M + (1/\theta_1^2 - 1/\mu)m_s}}$$

$$\mu = \frac{m_s}{M}$$

これを

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M + rm_s}}$$

の形で表した時のばねの等価質量係数  $r$  は

$$r = \frac{1}{\theta_1^2} - \frac{1}{\mu}$$

となる。 $\theta_1$  の計算値より求めた  $r$  の値を図 12 に示す。 $m_s < M$  の範囲では良い近似となっている。 $m_s/M$  が大きくなると，ばねだけの縦振動の値  $(2/\pi)^2 = 0.4053$  に漸近する。

Rayleigh 法による回転軸の危険速度 Fig.13 のように重り（歯車，回転翼，フライホイール等）を取り付けた軸が回転するときの，危険速度（固有振動数）を Rayleigh 法 で求める問題を考える。

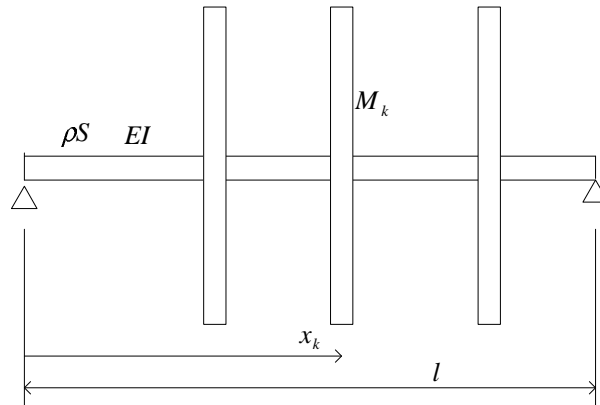


Fig. 13 回転軸のたわみ振動

曲げ振動をしている軸のたわみが次式で表されると仮定する。

$$u(t, x) = X(x) \sin \omega t \tag{81}$$

$X(x)$  は振幅関数であるが，例えば集中加重（または分布加重）による静たわみ等，既知の関数を用いるものとする。

圧縮・引っ張りに伴う弾性ひずみエネルギーは，単位体積あたり  $e = (1/2)\sigma\epsilon = (1/2)E\epsilon^2$  であるから，はりの曲げ変形によるひずみポテンシャルエネルギーは，はりの単位長さあたり，

$$\frac{1}{2}E \int_S \epsilon^2 dS = \frac{1}{2}E \int_S \left(\frac{\eta}{R}\right)^2 dS = \frac{1}{2}EI \frac{1}{R^2} \simeq \frac{1}{2}EI \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2$$

となる。ただし  $R$  は変形したはりの曲率半径である。

これより、はり全体のひずみエネルギーは

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)^2 dx \times \sin^2 \omega t$$

となり、その最大値は

$$U_{max} = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)^2 dx \quad (82)$$

となる。

一方、位置  $x_k$  にある質量  $M_k$  の重りの運動エネルギーは

$$\frac{1}{2} M_k \left[ \frac{\partial u(t, x_k)}{\partial t} \right]^2 = \frac{1}{2} M_k \omega^2 X_k^2 \cos^2 \omega t$$

であり、はりの微小部分  $dx$  の持つ運動エネルギーは

$$\frac{1}{2} (\rho S dx) \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho S \omega^2 X^2 \cos^2 \omega t dx$$

となる。ただし、 $X_k$  は  $x = x_k$  における振幅  $X(x_k)$  である。

全運動エネルギーは、

$$\begin{aligned} T &= \sum_k \frac{1}{2} M_k \omega^2 X_k^2 \cos^2 \omega t + \int_0^l \frac{1}{2} \rho S \omega^2 X^2 \cos^2 \omega t dx \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 \left( \sum_k M_k X_k^2 + \int_0^l \rho S X^2 dx \right) \cos^2 \omega t \end{aligned}$$

となり、その最大値は

$$T_{max} = \frac{1}{2} \omega^2 \left( \sum_k M_k X_k^2 + \int_0^l \rho S X^2 dx \right) \quad (83)$$

となる。

$U_{max} = T_{max}$  と置いて、次式より  $X(x)$  に対応する固有振動数  $\omega$  が求まる。

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EI \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)^2 dx}{\sum_k M_k X_k^2 + \int_0^l \rho S X^2 dx} \quad (84)$$

振幅曲線  $X(x)$  には、境界条件を満たすような適当な曲線を用いればよい。例えば、適当な荷重（集中荷重または分布荷重、重力等）を加えた時のたわみ曲線を用いればよい。こうして得られる固有振動数に含まれる誤差は、振幅曲線の誤差より次数が低くなることが知られている。タービン等のように、回転軸に複数の回転円板等が付加されているような複雑な場合に威力を発揮する。

中央に重りを付けた単純支持はり

中央に質量  $M$  の重りを付けた長さ  $l$  の単純支持はりを考える。

(集中荷重たわみ近似)

はり中央に集中荷重  $F$  を受ける単純はりのたわみは次式で与えられる。

$$y = \frac{Fl^3}{48EI} \left( \frac{3x}{l} - \frac{4x^3}{l^3} \right) \quad \left( 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \right)$$

これより, 次の振幅関数

$$X(x) = \delta \left( \frac{3x}{l} - \frac{4x^3}{l^3} \right) \quad \left( 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \right)$$

を用いて,

$$\begin{aligned} U_{max} &= 2 \times \frac{1}{2} \int_0^{l/2} EI \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)^2 dx = EI\delta^2 \int_0^{l/2} \left( -\frac{24x}{l^3} \right)^2 dx = \frac{24EI\delta^2}{l^3} \\ T_{max} &= \omega^2 \left[ \frac{1}{2} M X_{x=l/2}^2 + 2 \times \frac{1}{2} \int_0^{l/2} \rho S X^2 dx \right] \\ &= \omega^2 \left[ \frac{1}{2} M \delta^2 + \rho S \delta^2 \int_0^{l/2} \left( \frac{3x}{l} - \frac{4x^3}{l^3} \right)^2 dx \right] = \omega^2 \delta^2 \left( \frac{17}{70} \rho S l + \frac{1}{2} M \right) \end{aligned}$$

これより,  $U_{max} = T_{max}$  と置いて次式を得る。

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{24EI}{l^3 \left( \frac{17}{70} \rho S l + \frac{1}{2} M \right)} = \frac{48EI}{l^3 M \left( 1 + \frac{17}{35} \frac{\rho S l}{M} \right)} \\ \omega &= \sqrt{\frac{48EI}{l^3 M \left( 1 + \frac{17}{35} \frac{\rho S l}{M} \right)}} \end{aligned} \quad (85)$$

(分布荷重たわみ近似)

均一な分布荷重  $w$  を受ける単純はりのたわみは次式で与えられる。

$$y = \frac{wl^4}{24EI} \left( \frac{x}{l} - \frac{2x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right) \quad (0 \leq x \leq l)$$

これより, 次の振幅関数

$$X(x) = \delta \left( \frac{x}{l} - \frac{2x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right) \quad (0 \leq x \leq l)$$

を用いて,

$$\begin{aligned} U_{max} &= \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} EI \delta^2 \int_0^l \left( -\frac{12x}{l^3} + \frac{12x^2}{l^4} \right)^2 dx = \frac{12EI\delta^2}{5l^3} \\ T_{max} &= \frac{\omega^2}{2} \left[ \int_0^l \rho S X^2 dx + M X_{x=l/2}^2 \right] \\ &= \frac{\omega^2}{2} \delta^2 \left[ \rho S \int_0^l \left( \frac{x}{l} - \frac{2x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right)^2 dx + M \left( \frac{5}{16} \right)^2 \right] \\ &= \frac{\omega^2}{2} \delta^2 \left( \frac{31}{630} \rho S l + \frac{25}{256} M \right) \end{aligned}$$

これより，次式を得る。

$$\omega^2 = \frac{24EI}{5l^3 \left( \frac{31}{630} \rho Sl + \frac{25}{256} M \right)} = \frac{6144EI}{125l^3 M \left( 1 + \frac{3968\rho Sl}{7875M} \right)} = \frac{49.152EI}{l^3 M \left( 1 + 0.5039 \frac{\rho Sl}{M} \right)}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{49.152EI}{l^3 M \left( 1 + 0.5039 \frac{\rho Sl}{M} \right)}} = 7.011 \sqrt{\frac{EI}{l^3 M \left( 1 + 0.5039 \frac{\rho Sl}{M} \right)}} \quad (86)$$

(両近似の比較)

$\rho Sl \ll M$  の時，これは 1 自由度系となり，そのばね定数は

$$k = \frac{48EI}{l^3}$$

となるから，固有振動数は次式で与えられる。

$$\omega = \sqrt{\frac{48EI}{l^3 M}} = 6.928 \sqrt{\frac{EI}{l^3 M}} \quad (87)$$

上の集中荷重近似では

$$\omega = \sqrt{\frac{48EI}{l^3 M \left( 1 + \frac{17}{35} \frac{\rho Sl}{M} \right)}} \rightarrow \sqrt{\frac{48EI}{l^3 M}} = 6.928 \sqrt{\frac{EI}{l^3 M}} \quad (88)$$

また，分布荷重近似では，

$$\omega = \sqrt{\frac{49.152EI}{l^3 M \left( 1 + 0.5039 \frac{\rho Sl}{M} \right)}} \rightarrow \sqrt{\frac{49.152EI}{l^3 M}} = 7.011 \sqrt{\frac{EI}{l^3 M}} \quad (89)$$

$\rho Sl \gg M$  の時 (単純支持はりのみ)，1 次の固有振動数は次式で与えられる。

$$\omega_1 = \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} = \frac{9.870}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (90)$$

上の集中荷重近似では

$$\omega = \sqrt{\frac{48EI}{l^3 M \left( 1 + \frac{17}{35} \frac{\rho Sl}{M} \right)}} \rightarrow \sqrt{\frac{48EI}{l^3 M \frac{17}{35} \frac{\rho Sl}{M}}} = \frac{9.941}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (91)$$

分布荷重近似では，

$$\omega = \sqrt{\frac{49.152EI}{l^3 M \left( 1 + 0.5039 \frac{\rho Sl}{M} \right)}} \rightarrow \sqrt{\frac{49.152EI}{0.5039 l^3 \rho Sl}} = \frac{9.876}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho Sl}} \quad (92)$$

以上より， $\rho Sl \ll M$  の時は集中荷重近似が， $\rho Sl \gg M$  の時は分布荷重近似が良い近似となっていることがわかる。

片持はり

自由端に質量  $M$  の重りを付けた長さ  $l$  の片持ちはりを考える。

(集中荷重たわみ近似)

はり先端に集中荷重  $F$  を受ける片持はりのたわみは次式で与えられる。

$$y = \frac{Fl^3}{3EI} \left( \frac{3x^2}{2l^2} - \frac{x^3}{2l^3} \right) \quad (0 \leq x \leq l)$$

これより、次の振幅関数

$$X(x) = \delta \left( \frac{3x^2}{2l^2} - \frac{x^3}{2l^3} \right) \quad (0 \leq x \leq l)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} U_{max} &= \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} EI \delta^2 \int_0^l \left( \frac{3}{l^2} - \frac{3x}{l^3} \right)^2 dx = \frac{3EI\delta^2}{2l^3} \\ T_{max} &= \frac{1}{2} \omega^2 \left[ \int_0^l \rho S X^2 dx + M X_{x=l}^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 \delta^2 \left[ \rho S \int_0^l \left( \frac{3x^2}{2l^2} - \frac{x^3}{2l^3} \right)^2 dx + M \right] = \frac{1}{2} \omega^2 \delta^2 \left( \frac{33}{140} \rho S l + M \right) \end{aligned}$$

これより、 $U_{max} = T_{max}$  と置いて次式を得る。

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{3EI}{l^3 M \left( 1 + \frac{33}{140} \frac{\rho S l}{M} \right)} \\ \omega &= \sqrt{\frac{3EI}{l^3 M \left( 1 + \frac{33}{140} \frac{\rho S l}{M} \right)}} \end{aligned} \quad (93)$$

(分布荷重たわみ近似)

はりに均一な分布荷重  $w$  を受ける単純はりのたわみは次式で与えられる。

$$y = \frac{wl^4}{24EI} \left( \frac{6x^2}{l^2} - \frac{4x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right) \quad (0 \leq x \leq l)$$

これより、次の振幅関数

$$X(x) = \frac{\delta}{3} \left( \frac{6x^2}{l^2} - \frac{4x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right) \quad (0 \leq x \leq l)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} U_{max} &= \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} EI \frac{\delta^2}{9} 12^2 \int_0^l \left( \frac{1}{l^2} - \frac{2x}{l^3} + \frac{x^2}{l^4} \right)^2 dx = \frac{8EI\delta^2}{5l^3} \\ T_{max} &= \frac{\omega^2}{2} \left[ \int_0^l \rho S X^2 dx + M X_{x=l}^2 \right] \\ &= \frac{\omega^2 \delta^2}{2} \frac{1}{9} \left[ \rho S \int_0^l \left( \frac{6x^2}{l^2} - \frac{4x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right)^2 dx + 9M \right] \\ &= \frac{\omega^2}{2} \delta^2 \left( \frac{104}{405} \rho S l + M \right) \end{aligned}$$

これより，次式を得る。

$$\omega^2 = \frac{16EI}{5l^3 \left( \frac{104}{405} \rho Sl + M \right)} = \frac{16EI}{5l^3 M \left( 1 + \frac{104\rho Sl}{405M} \right)}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{16EI}{5l^3 M \left( 1 + \frac{104\rho Sl}{405M} \right)}} \quad (94)$$

(両近似の比較)

$\rho Sl \ll M$  の時，これは 1 自由度系となり，そのばね定数は

$$k = \frac{3EI}{l^3}$$

となるから，固有振動数は次式で与えられる。

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{3EI}{l^3 M}} = 1.732 \sqrt{\frac{EI}{l^3 M}} \quad (95)$$

上の集中荷重近似では

$$\omega = \sqrt{\frac{3EI}{l^3 M \left( 1 + \frac{33}{140} \frac{\rho Sl}{M} \right)}} \rightarrow \sqrt{\frac{3EI}{l^3 M}} = 1.732 \sqrt{\frac{EI}{l^3 M}} \quad (96)$$

また，分布荷重近似では，

$$\omega = \sqrt{\frac{16EI}{5l^3 M \left( 1 + \frac{104\rho Sl}{405M} \right)}} \rightarrow \sqrt{\frac{16EI}{5l^3 M}} = 1.789 \sqrt{\frac{EI}{l^3 M}} \quad (97)$$

一方， $\rho Sl \gg M$  の時 (単純支持はりのみ)，1 次の固有振動数は次式で与えられる。

$$\omega_1 = \frac{1.875^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} = \frac{3.516}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (98)$$

上の集中荷重近似では

$$\omega = \sqrt{\frac{3EI}{l^3 M \left( 1 + \frac{33}{140} \frac{\rho Sl}{M} \right)}} \rightarrow \sqrt{\frac{3EI}{l^3 M \frac{33}{140} \frac{\rho Sl}{M}}} = \frac{3.568}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (99)$$

分布荷重近似では，

$$\omega = \sqrt{\frac{16EI}{5l^3 M \left( 1 + \frac{104\rho Sl}{405M} \right)}} \rightarrow \sqrt{\frac{16EI}{5l^3 M \frac{104\rho Sl}{405M}}} = \frac{3.530}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho Sl}} \quad (100)$$

この場合でも， $\rho Sl \ll M$  の時は集中荷重近似が， $\rho Sl \gg M$  の時は分布荷重近似が良い近似となっていることがわかる。



## 26.3 Rayleigh-Ritz 法

Rayleigh 法では、振幅曲線を適当に仮定して固有振動数を求める。仮定した振幅曲線が実際のものと異なっているということは、部材の各部分に適当なバネを追加して、仮定した振幅曲線に一致させたものと等価である。このように考えると、Rayleigh 法では実際より剛性を大きく評価している事になり、固有振動数は実際の値より大きくなるはずである。振幅関数が実際のものに近づくにつれて、得られる固有振動数は小さくなり、実際の値に近づくと考えられる（この説明は正確ではないが、変分法等を用いてこれを正確に示すことができる）。

$X(x)$  に関する境界条件を満たす  $n$  個の関数  $\phi_i(x)$  を選び、

$$X(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) \quad (101)$$

で表される振幅関数を考える。 $c_i$  は任意定数であり、この  $X(x)$  から求まる固有振動数

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EI \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)^2 dx}{\sum_k M_k X_k^2 + \int_0^l \rho S X^2 dx} \quad (102)$$

が最小となる（全ての  $i$  について  $\frac{\partial \omega^2}{\partial c_i} = 0$  を満たす）ように  $c_i$  を定めれば、より正確な固有振動数が求まる。この方法を、Rayleigh-Ritz 法または単に Ritz 法という。詳細は省略する（[4] 等を参照）。

## 26.4 その他の近似解法

Grammel の公式 回転軸に歯車、はずみ車、翼列等の多数の回転体を取り付けられている場合、これに Rayleigh 法を適用することができる。ここでは軸自体の質量を適当に分割し、回転体の質量に付加（または別個に質量を追加）して扱うものとする。

回転体の質量を  $M_1, M_2, \dots, M_n$  とし、回転体の自重によるそれぞれの位置での静たわみを、 $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  とする。この静たわみを振幅曲線とすると、ポテンシャルエネルギーと運動エネルギーの最大値は次式となる。

$$U_{max} = \frac{1}{2} (M_1 \delta_1 + M_2 \delta_2 + \cdots + M_n \delta_n) g \quad (103)$$

$$T_{max} = \frac{\omega^2}{2} (M_1 \delta_1^2 + M_2 \delta_2^2 + \cdots + M_n \delta_n^2) \quad (104)$$

この両者が等しい事から固有振動数が次式のように求まる。

$$\omega^2 = \frac{g \sum_{i=1}^n M_i \delta_i}{\sum_{i=1}^n M_i \delta_i^2} \quad (105)$$

これを Grammel の公式という。

Grammel の公式は、軸の質量も全て集中荷重で置き換えた集中荷重たわみ曲線で近似した Rayleigh 法と見ることができる。たわみ曲線を求める際には、材料力学と同様な積分計算が必要であるが、 $U_{max}$ 、 $T_{max}$  の計算では積分計算する必要はない点で、使いやすい。

Dunkerley の実験式 多数の回転円板等の集中質量を有する軸の危険速度 (1 次の固有振動数  $\omega$ ) に対して, Dunkerley は実験的に次の関係式を見出した。

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega_s^2} + \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \cdots + \frac{1}{\omega_n^2} \quad (106)$$

ここで,  $\omega_s$  は回転円板等を有しない軸自身の固有振動数であり,  $\omega_1, \omega_2, \dots$  は各回転円板等を単独に取りつけた時の固有振動数である。右辺第 1 項  $1/\omega_s^2$  の代わりに, 軸の質量を適当に分割して回転体の質量に付加して計算してもよい。これらはいずれも基本振動 (1 次の振動) に対するものであり, 高次の振動に対しては使うことはできない。

この関係式は実験的に求められたものであるが, 理論的根拠がある事が確かめられている。

## 26.5 回転軸の振れ回り

先に回転円板の偏心量と回転軸のたわみ量の関係について概観した。ここではそれをもう少し正確に (2 次的に) 検討する。

軸に回転板がとりつけられ, その偏心量を  $\epsilon$  とする。この円板が角速度  $\omega$  で回転しているとき, 円板の質量に対して軸の質量を無視すると, 円板が回転しながら, その重心が平面内を運動する系と考えることができる。回転中心を原点  $O(0, 0)$  とし, 円板の回転軸とりつけ位置 (平衡時は原点) を  $P(u, v)$  とすると, 重心位置は  $G(u + \epsilon \cos \omega t, v + \epsilon \sin \omega t)$  となり, 運動方程式は次式となる。

$$M \frac{d^2}{dt^2} (u + \epsilon \cos \omega t) + c \frac{du}{dt} + ku = 0 \quad (107)$$

$$M \frac{d^2}{dt^2} (v + \epsilon \sin \omega t) + c \frac{dv}{dt} + kv = 0 \quad (108)$$

$M$  は回転板の質量,  $c$  はたわみに対する減衰抵抗,  $k$  は回転板位置での軸のたわみ剛性である。

$$w = u + iv \quad (109)$$

と置くと, 上式は次式となる。

$$M \frac{d^2}{dt^2} (w + \epsilon e^{i\omega t}) + c \frac{dw}{dt} + kw = 0$$

または

$$M \frac{d^2 w}{dt^2} + c \frac{dw}{dt} + kw = M\epsilon\omega^2 e^{i\omega t} \quad (110)$$

これは, 加振力  $M\epsilon\omega^2 e^{i\omega t}$  の強制振動であり, 特解は次式となる。

$$w = \frac{M\epsilon\omega^2}{k - M\omega^2 + ic\omega} e^{i\omega t} = \frac{\epsilon\omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\zeta\omega_n\omega} e^{i\omega t} = |w| e^{i(\omega t - \phi)} \quad (111)$$

ただし

$$|w| = \frac{\epsilon\omega^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}} \quad (112)$$

$$\tan \phi = \frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (113)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad (114)$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{Mk}} \quad (115)$$

ここで、 $|w|$  の値は、

$$|w| = \begin{cases} \epsilon\omega^2/\omega_n^2 & \text{when } \omega \ll \omega_n \\ \epsilon\omega/(2\zeta\omega_n) & \text{when } \omega = \omega_n \\ \epsilon & \text{when } \omega \gg \omega_n \end{cases}$$

$$\phi = \begin{cases} 0 & \text{when } \omega \ll \omega_n \\ \pi/2 & \text{when } \omega = \omega_n \\ \pi & \text{when } \omega \gg \omega_n \end{cases}$$

重心位置は次式のようになる。

$$w_G = |w|e^{i(\omega t - \phi)} + \epsilon e^{i\omega t} = \frac{\omega_n^2 + 2i\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\zeta\omega_n\omega} \epsilon e^{i\omega t} \quad (116)$$

$P$  と  $G$  の移動は、図 14 およびテキスト図 11-4 のようになる。

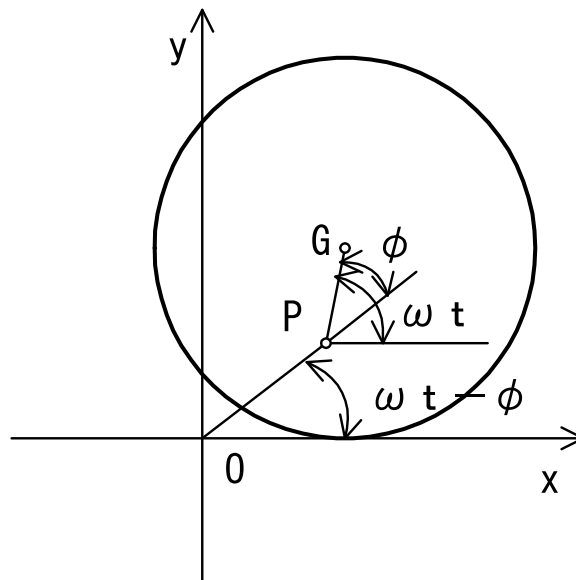


Fig. 14 軸の振れ回り

$\omega \ll \omega_n$  の時 位相角  $\phi$  は 0 に近く、 $G$  は常に  $P$  の外側に位置し、 $\omega$  の増加と共に  $|w|$  が増加する。 $|w|$  の増加を小さくするには、軸の剛性  $EI$  を大きくする。このような軸を剛性軸という。

$\omega \simeq \omega_n$  の時 共振して  $|w|$  が極大になり、減衰がなければ無限大となる。この時の位相角  $\phi$  は  $\pi/2$  となっている。この回転速度を危険速度と呼んでいる。

$\omega \gg \omega_n$  の時 位相角  $\phi$  は  $\pi$  に近く、 $G$  は常に  $P$  の内側に位置する。 $\omega$  の増加と共に  $|w|$  が減少して、 $\epsilon$  に近づき、従って、 $G$  が回転中心に近づき、振動が小さくなる。振動を小さくするには、軸の剛性  $EI$  を小

さくして、 $\omega_n$  を小さくする。このような軸をたわみ軸という。ただし、回転開始に当たって、危険速度を通過する際、速やかに加速して回転を上げる必要がある。

## 参考文献

- [1] 資料, ”連続体の振動方程式の誘導”, 別紙 (2002).
- [2] A. Sommerfeld(増田秀行 訳), ”物理数学 偏微分方程式論”, 講談社 (1969).
- [3] 山田伸志 監修, ”振動工学入門”, パワー社 (1984).
- [4] 中村行三, 関谷 荘, ”機械力学”, いずみ書房 (1961).
- [5] 井町 勇 他, ”機械振動学”, 朝倉書店 (1964).
- [6] 小野 周, ”岩波講座基礎工学 1 力学 (3)”, 岩波書店 (1968).