機械力学参考資料(振り子)

S. Yamauchi

2011 年 6 月 30 日

目 次

1 単振子

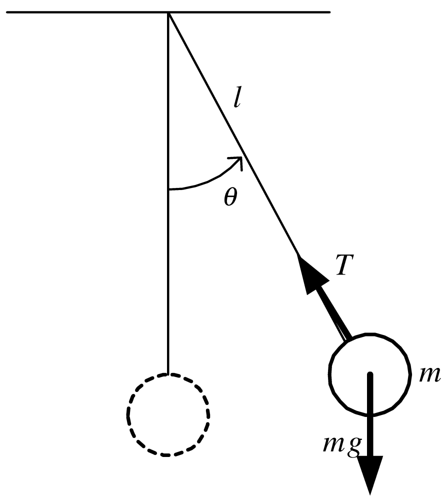

図 1: 単振子

1.1　運動方程式の誘導

図 1 に示す単振子の運動を考える。質量 m の錘 (質点) には重力 mg と糸の張力 T が働く。この錘の運動方程式を誘導する。

運動方程式を導く方法として以下の方法等が考えられる。

(1) デカルト座標系での平面運動として扱い，水平方向 (x 方向) および鉛直方向 (y 方向) の運動方程式から求める。
(2) 支点回りの角運動量定理を適用する。
(3) 軌道に沿う曲線座標系での運動方程式から求める。
(4) 2 次元極座標 (円筒座標) での運動方程式をもとにする。

(デカルト座標系平面運動としての扱い)　水平方向 (x 方向) および鉛直方向 (y 方向) の釣り合いから次式を得る。

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -T\sin\theta \\ m\ddot{y} &= T\cos\theta - mg \end{aligned}$$

一方，x と y の間には，次の関係 (拘束条件) がある。

$$\begin{aligned} x &= l\sin\theta \\ y &= -l\cos\theta \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} \dot{x} &= l\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y} &= l\dot{\theta}\sin\theta \\ \ddot{x} &= l(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) \\ \ddot{y} &= l(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) \end{aligned}$$

となり，これを上式に代入して，次式を得る。

$$ml(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = -T\sin\theta \tag{1}$$

$$ml(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) = T\cos\theta - mg \tag{2}$$

これより T を消去すると，次式を得る。

$$ml(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)\cos\theta + ml(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\sin\theta = -mg\sin\theta$$

整理して次式となる。

$$l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \tag{3}$$

時間の関数として $\theta(t)$ が求まれば，式 (1) または (2) より 張力 T が求まる。

(角運動量定理による扱い)　角運動量 (=運動量×腕の長さ) と力のモーメント (=力×腕の長さ) の間には，常に次の関係が成り立つ。

$$\frac{d}{dt}(\text{角運動量}) = (\text{力のモーメント})$$

これを単振子の運動に用いると，次式となる。

$$\frac{d(ml\dot{\theta}\times l)}{dt} = -mg\sin\theta\times l$$

これより次式を得る。

$$l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$$

(軌道に沿う曲線座標系による扱い)　運動の軌道が与えられている場合，その軌道に沿う座標を s，軌道の曲率半径を ρ とする。曲率半径は s の関数 $\rho = \rho(s)$ である。

接線方向の速度 v_t および加速度 a_t は次式で表される。

$$\begin{aligned} v_t &= \dot{s} \\ a_t &= \ddot{s} \end{aligned}$$

一方，法線方向 (曲率中心方向) の速度 v_n および加速度 a_n は次式で表される。

$$\begin{aligned} v_n &= 0 \\ a_n &= \frac{v_t^2}{\rho} \end{aligned}$$

従って，質点に働く力を接線方向成分 F_t と法線方向成分 F_n(曲率中心方向) に分けるとき，運動方程式は次式で表される。

$$m\ddot{s} = F_t \tag{4}$$

$$m\frac{v_t^2}{\rho} = F_n \tag{5}$$

単振子の運動の場合，

$$\begin{aligned} s &= l\theta \\ v_t &= l\dot{\theta} \\ \rho &= l \end{aligned}$$

であり，糸の張力 T および重力 mg を用いると運動方程式は次式となる。

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \tag{6}$$

$$ml\dot{\theta}^2 = T - mg\cos\theta \tag{7}$$

式 (6) より次の運動方程式を得る。

$$l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$$

張力は式 (7) より求まる。

($r-\theta$ 2 次元極座標での扱い)　2 次元極座標での運動方程式 [1]

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= F_r \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) &= F_\theta \end{aligned}$$

をこの単振子の運動に適用すると，次式を得る。

$$\begin{aligned} -ml\dot{\theta}^2 &= mg\cos\theta - T \\ ml\ddot{\theta} &= -mg\sin\theta \end{aligned}$$

第 2 式より，次式を得る。

$$l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$$

この解 $\theta(t)$ を第 1 式に用いると，張力 T が求まる。

1.2 運動方程式の解

運動方程式は次式となる。

$$l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \tag{8}$$

(微小振幅振動に対する解) $\theta << 1$ の場合は $\sin\theta \sim \theta$ であるから，

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

と近似できる。これはばね質量系と同一であり，固有角振動数は $\omega_n = \sqrt{g/l}$ である。

この解は $\theta = C_1\cos\omega_n t + C_2\sin\omega_n t$ である。

(有限振幅の振動に対する厳密解：参考) 式 (8) の解を初等関数を用いて表すことはできない。楕円関数を用いた解を以下に示す。

基礎式に $l\dot{\theta}$ を乗じて t について積分すると次式を得る。

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta = \text{const.} = E \tag{9}$$

上式は力学的エネルギ保存則を表している。$\dot{\theta} = 0$ となる θ (θ の最大値) を θ_0 と置くと，

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta = -mgl\cos\theta_0$$

つまり

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

または

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)}} = dt \tag{10}$$

左辺の積分を実行するために，

$$\sin\frac{\theta}{2} = z\ \sin\frac{\theta_0}{2} = kz \tag{11}$$

$$k = \sin\frac{\theta_0}{2} \tag{12}$$

と置くと，

$$\begin{aligned} \cos\theta - \cos\theta_0 &= \left(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) - \left(1 - 2\sin^2\frac{\theta_0}{2}\right) = 2\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) = 2k^2(1 - z^2) \\ kdz &= \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta = \frac{1}{2}\sqrt{1 - k^2z^2}d\theta \end{aligned}$$

これを式 (10) に用いて，$t=0$ で $\theta=0$ として積分すると，

$$t=\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta-\cos\theta_0)}}=\int_0^z \frac{2kdx}{\sqrt{\frac{2g}{l}(2k^2(1-x^2))}\sqrt{1-k^2x^2}}=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

つまり，

$$\sqrt{\frac{g}{l}}t=\int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \tag{13}$$

となる。

ここで，$0\le k\le 1$ となる k に対して，

$$u=\int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \tag{14}$$

となる関数 $u(z)$ の逆関数 $z(u)$ を，母数を k とした Jacobi の sn 関数と呼び，$z=\mathrm{sn}(u,k)$ と表記する。sn 関数は楕円関数と呼ばれる一連の関数のひとつである。

この sn 関数を用いて式 (13) を表すと，

$$z=\mathrm{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t,k\right)$$

従って，式 (11),(12) を用いて，$\sin(\theta/2)$ は次式で表される。

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sin\frac{\theta_0}{2}\ \mathrm{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t,\sin\frac{\theta_0}{2}\right) \tag{15}$$

また，初期条件の異なる解 (一般解) は任意の定数 ϵ を用いて次式で表すことができる。

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sin\frac{\theta_0}{2}\ \mathrm{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t+\epsilon,\sin\frac{\theta_0}{2}\right)$$

2 剛体振子

図 2 のように，質量 M の剛体が重心から l 離れた点で回転支持されている。回転支持点での反力 (拘束力) を水平方向と鉛直方向に分けて N_x および N_y とする。

(デカルト座標系での扱い) 剛体重心の並進運動と重心回りの回転運動に分けて考える。

重心の座標 (x, y) と回転角 θ の間には次の関係がある (拘束条件)。

$$x = l\sin\theta \tag{16}$$

$$y = -l\cos\theta \tag{17}$$

水平方向 (x 方向) および鉛直方向 (y 方向) の運動量定理から次式を得る。

$$M\ddot{x} = N_x \tag{18}$$

$$M\ddot{y} = N_y-Mg \tag{19}$$

また，重心回りの角運動量定理から次式を得る。

$$J_G\ddot{\theta}=-xN_y+yN_x \tag{20}$$

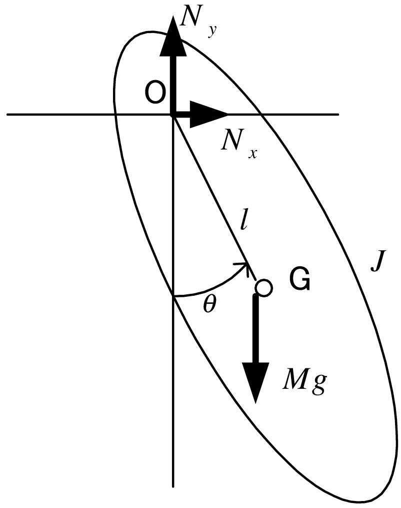

図 2:剛体振子

J_G は重心回りの慣性モーメントである。

式 (18)，(19) の N_x，N_y を式 (20) に代入して消去すると次式となる。

$$\frac{J_G}{M}\ddot{\theta} = -x\ddot{y} + y\ddot{x} - xg \tag{21}$$

一方，式 (16) および (17) より，

$$\dot{x} = l\dot{\theta}\cos\theta \quad , \qquad \ddot{x} = l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\sin\theta$$
$$\dot{y} = l\dot{\theta}\sin\theta \quad , \qquad \ddot{y} = l\ddot{\theta}\sin\theta + l\dot{\theta}^2\cos\theta$$

これを式 (21) に用いて，

$$\begin{aligned}\frac{J_G}{M}\ddot{\theta} &= -l\sin\theta(l\ddot{\theta}\sin\theta + l\dot{\theta}^2\cos\theta) - l\cos\theta(l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\sin\theta) - lg\sin\theta \\ &= -l^2\ddot{\theta}\sin\theta - lg\sin\theta\end{aligned}$$

整理して，次式を得る。

$$\ddot{\theta} + \frac{Mgl}{J_G + Ml^2}\theta = 0$$

または，回転支持軸まわりの慣性モーメント

$$J = J_G + Ml^2 \tag{22}$$

を用いると次式となる。

$$\ddot{\theta} + \frac{Mgl}{J}\theta = 0 \tag{23}$$

これは前節と同一形であるから，$\theta << 1$ の場合は

$$\ddot{\theta} + \frac{Mgl}{J}\theta = 0$$

となり，固有角振動数は次式である。

$$\omega_n = \sqrt{\frac{Mgl}{J}} \tag{24}$$

時間の関数として $\theta(t)$ が求まれば，式 (18) または (19) より反力 N_x および N_y が求まる。

$$\begin{aligned} N_x &= Ml(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) && (25) \\ N_y &= Ml(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) + Mg && (26) \end{aligned}$$

N_x および N_y には，重力に釣り合う力 (0 , Mg)，遠心力に釣り合う力 ($-Ml\dot{\theta}^2\sin\theta$, $Ml\dot{\theta}^2\cos\theta$) に加えて，($Ml\ddot{\theta}\cos\theta$, $Ml\ddot{\theta}\sin\theta$) が作用している。これは，重心に働く重力とペアとなり，回転の角速度を変化させるのに要する偶力となっている。

(回転支持点まわりの角運動量定理による扱い) 回転支持点まわりの角運動量は $J\dot{\theta}$ ，力のモーメントは $-Mgl\sin\theta$ であるから，角運動量の定理より次式を得る。

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgl\sin\theta \tag{27}$$

または,

$$\ddot{\theta} + \frac{Mgl}{J}\sin\theta = 0$$

(二次元極座標系での扱い) $r-\theta$ 極座標での運動方程式は次式となる [1]。

$$\begin{aligned} M(\ddot{l} - l\dot{\theta}^2) &= (Mg - N_y)\cos\theta + N_x\sin\theta \\ M(l\ddot{\theta} + 2\dot{l}\dot{\theta}) &= -(Mg - N_y)\sin\theta + N_x\cos\theta \end{aligned}$$

$l = \mathrm{const.}$ であるから,

$$\begin{aligned} -Ml\dot{\theta}^2 &= (Mg - N_y)\cos\theta + N_x\sin\theta && (28) \\ Ml\ddot{\theta} &= -(Mg - N_y)\sin\theta + N_x\cos\theta && (29) \end{aligned}$$

これより N_x および N_y を求めると，式 (25) と (26) に一致する。剛体の運動であるから，解 $\theta(t)$ を得るには，角運動量式 (20) または (27) が必要である。

3　楕円関数（参考）

$0 \le k \le 1$ となる k に対して,

$$u = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \tag{30}$$

となる関数 $u(z)$ の逆関数 $z(u)$ を，母数を k とした Jacobi の sn 関数と呼び，$z = \mathrm{sn}(u,k)$ と表記する。

式 (30) に $k = 0$ を代入することにより,

$$u = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \int_0^z \frac{d(\sin\theta)}{\sqrt{(1-\sin^2\theta)}} = \int_0^{sin^{-1}z} \frac{\cos\theta}{\cos\theta}d\theta = \sin^{-1} z$$

つまり，$k=0$ のとき，

$$z = \mathrm{sn}(u,0) = \sin u \tag{31}$$

となる。また，式 (30) に $k=1$ を代入することにより，

$$u = \int_0^z \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\int_0^z \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-x}\right) dx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$$

または

$$e^{2u} = \frac{1+z}{1-z}$$

つまり，$k=1$ のとき，

$$z = \mathrm{sn}(u,1) = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = \tanh u \tag{32}$$

となる。$\mathrm{sn}(u,k)$ の形を図 3 に示す。

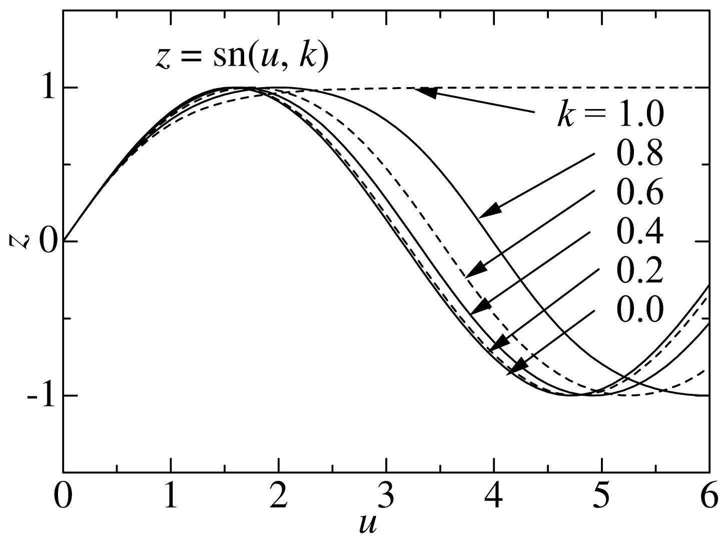

図 3: 楕円関数 y = sn(x,k)

関連して，楕円関数 $\mathrm{cn}(u,k)$，$\mathrm{dn}(u,k)$ を次式で定義する。

$$\mathrm{cn}(u,k) = \sqrt{1-\mathrm{sn}^2(u,k)} \tag{33}$$

$$\mathrm{dn}(u,k) = \sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2(u,k)} \tag{34}$$

$$\tag{35}$$

これらの楕円関数の間に次の関係式が成立する。

$$\mathrm{sn}^2(u,k) + \mathrm{cn}^2(u,k) = 1 \tag{36}$$

$$k^2\mathrm{sn}^2(u,k) + \mathrm{dn}^2(u,k) = 1 \tag{37}$$

$$\frac{d}{du}\mathrm{sn}(u,k) = \mathrm{cn}(u,k)\mathrm{dn}(u,k) \tag{38}$$

$$\frac{d}{du}\mathrm{cn}(u,k) = -\mathrm{sn}(u,k)\mathrm{dn}(u,k) \tag{39}$$

$$\frac{d}{du}\mathrm{dn}(u,k) = -k^2\mathrm{sn}(u,k)\mathrm{cn}(u,k) \tag{40}$$

参考文献

[1] S. Yamauchi, "**直交曲線座標系**", 機械力学参考資料.

[2] 戸田盛和 著, "**物理入門コース 1 力学**", 岩波書店 (1982).

[3] カルマン，ビオ (村上他訳), "**工学における数学的方法 上，下**", 法政大学出版局 (1954).

[4] 小野 周, "**岩波講座基礎工学 1 力学** (3)", 岩波書店 (1968).