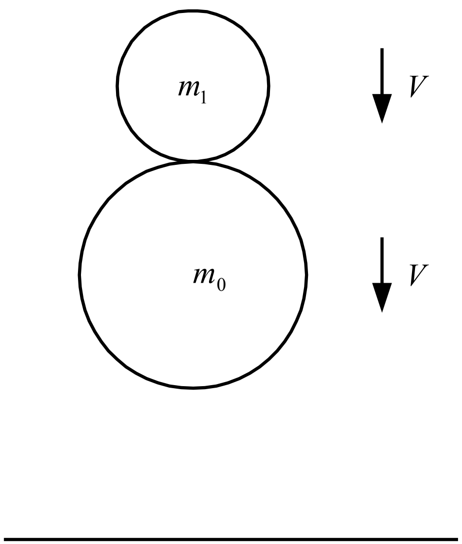
二つのボール問題

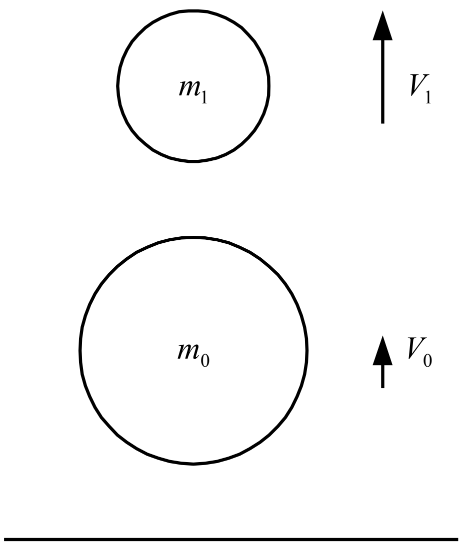
2010年7月

問題

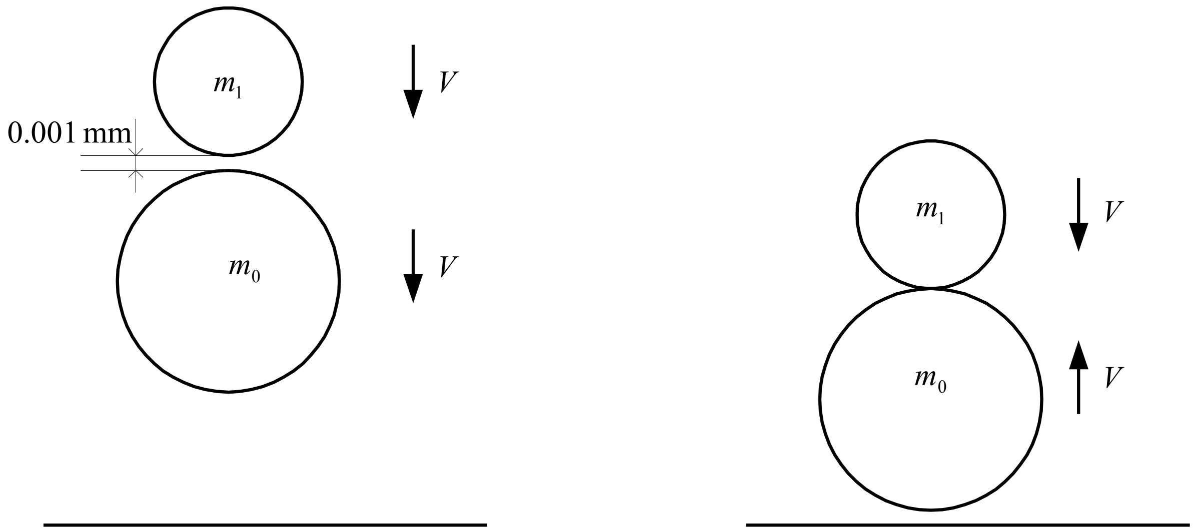
- ボール0（バスケットボール）の上にボール1（テニスボール）を重ねて，硬い床の上に落とす。床と衝突時の速度は V であり，完全弾性衝突するものとする。

　跳ね返った後の両ボールそれぞれの速度を求めよ。不足する条件は必要に応じて補え。





解答（A案）



- ボール0が床に当たって反転し，その後ボール1に衝突と考えると - - -。

$$m_0 V - m_1 V = m_0 V_0 + m_1 V_1$$

$$2V = V_1 - V_0$$

$$V_1 = \frac{3m_0 - m_1}{m_0 + m_1} V \to 3V$$

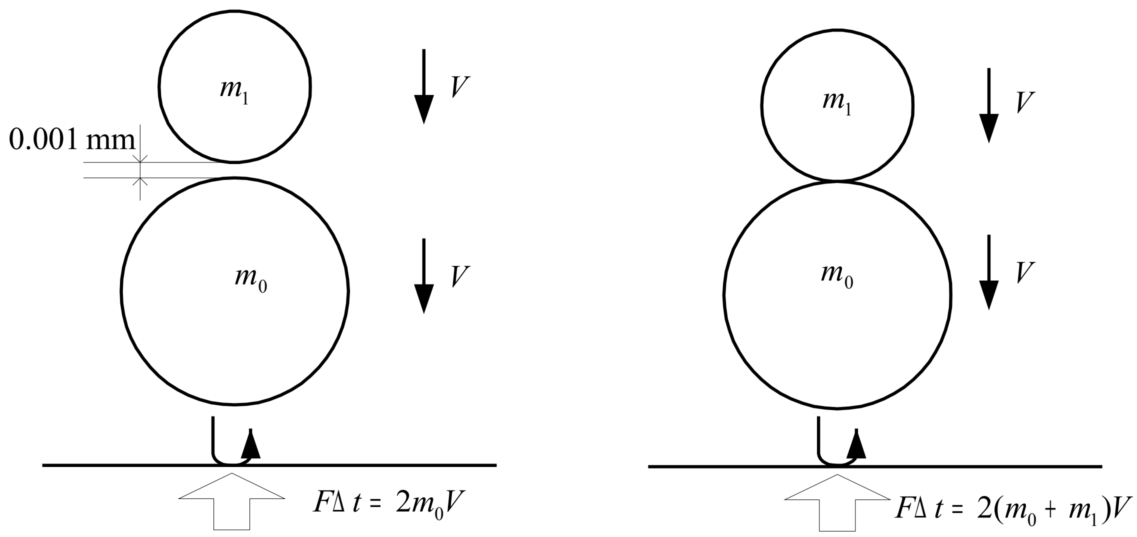
$$V_0 = \frac{m_0 - 3m_1}{m_0 + m_1} V \to V$$

疑問

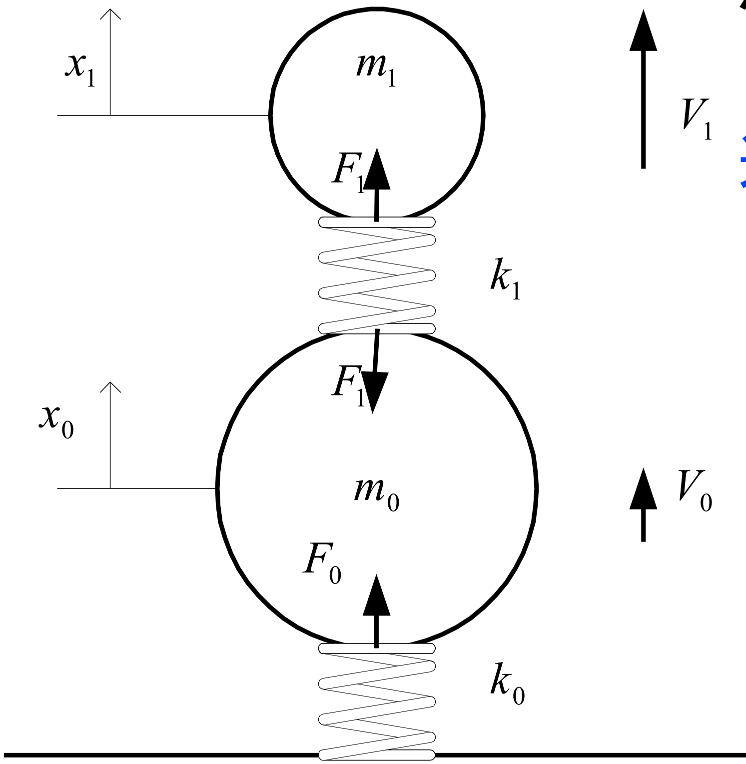
- 衝突が床（地球）に及ぼす影響は？

ボール0が床に当たる瞬間，
両ボール間に隙間があれば，ボール0だけが影響する
両ボールが一体であれば，　ボール1も影響するはず！
単に接触しているだけの場合はどちら？

- 何かおかしい？



解答（B案）



ボールの弾性変形を考慮し
ばねを挿入する。

運動方程式

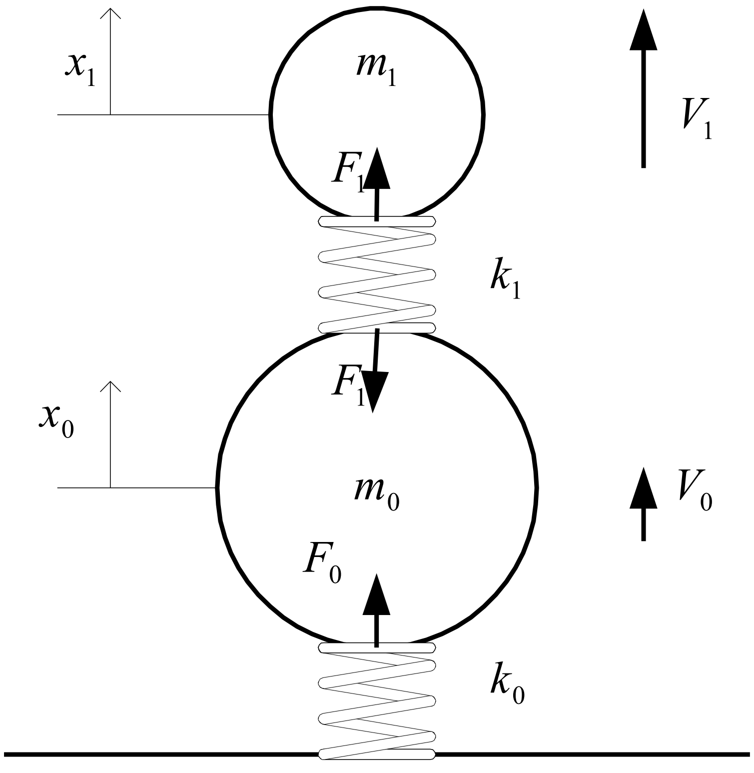
$$m_0 \ddot{x}_0 = F_0 - F_1$$

$$m_1 \ddot{x}_1 = F_1$$

$$F_0 = \begin{cases} k_0(-x_0) & (x_0 < 0) \\ 0 & (x_0 \geq 0) \end{cases}$$

$$F_1 = \begin{cases} k_1(x_0 - x_1) & (x_0 > x_1) \\ 0 & (x_0 \leq x_1) \end{cases}$$

数値解を求める



$$\ddot{x}_0 = (F_0 - F_1)/m_0$$
$$\ddot{x}_1 = F_1/m_1$$

２階２元微分方程式を１階４元に変換

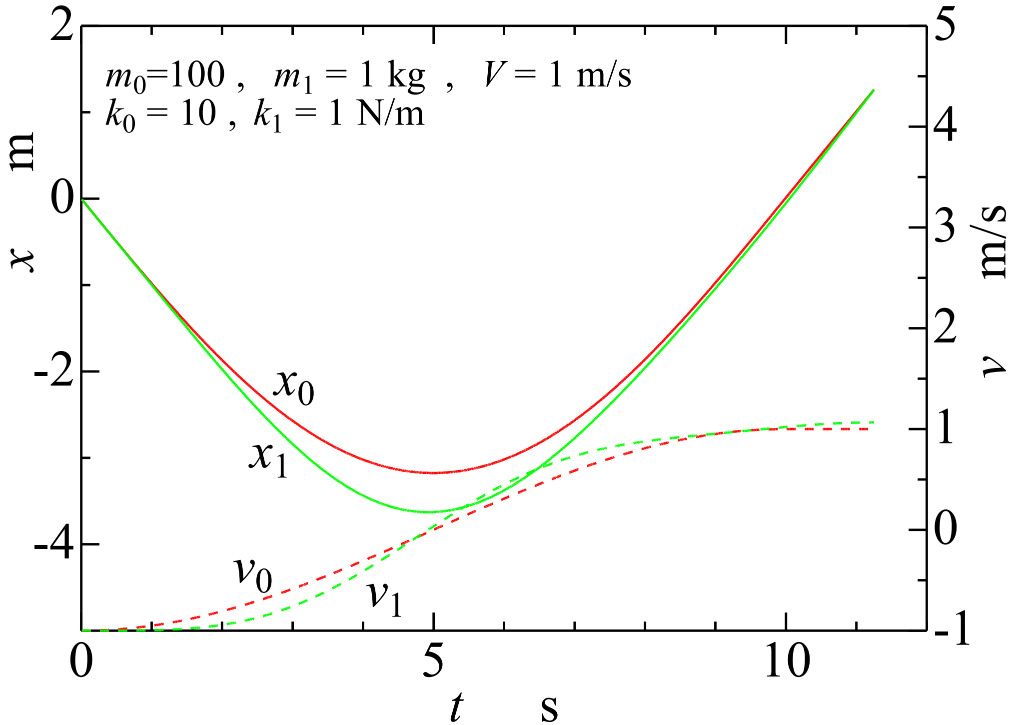
$$\dot{x}_0 = v_0$$
$$\dot{x}_1 = v_1$$
$$\dot{v}_0 = (F_0 - F_1)/m_0$$
$$\dot{v}_1 = F_1/m_1$$

when $t = 0$

$$x_0 = x_1 = 0, \quad v_0 = v_1 = -V$$

→　Runge=Kutta法で解く

$K_0/K_1 = 10$ $(m_0/m_1=100)$



$$\frac{k_0}{k_1} < \frac{m_0}{m_1}$$

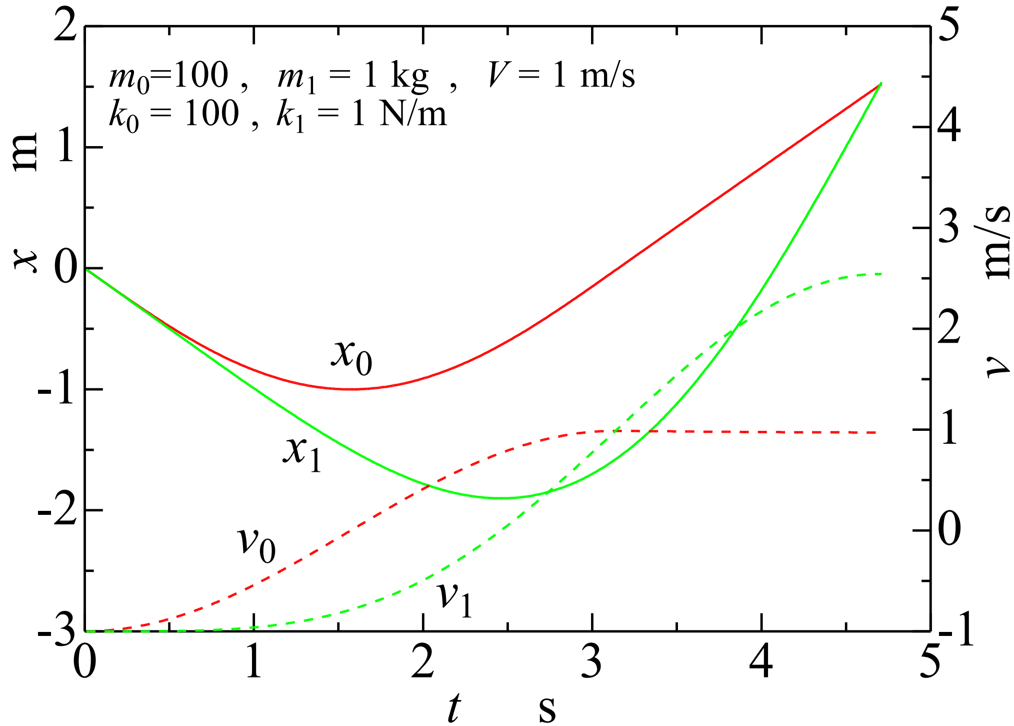
k_0が大きく縮み，

k_1が少し縮む

m_0とm_1はほぼ同期

$V_0=V_1 = V$

$K_0/K_1 = 100$



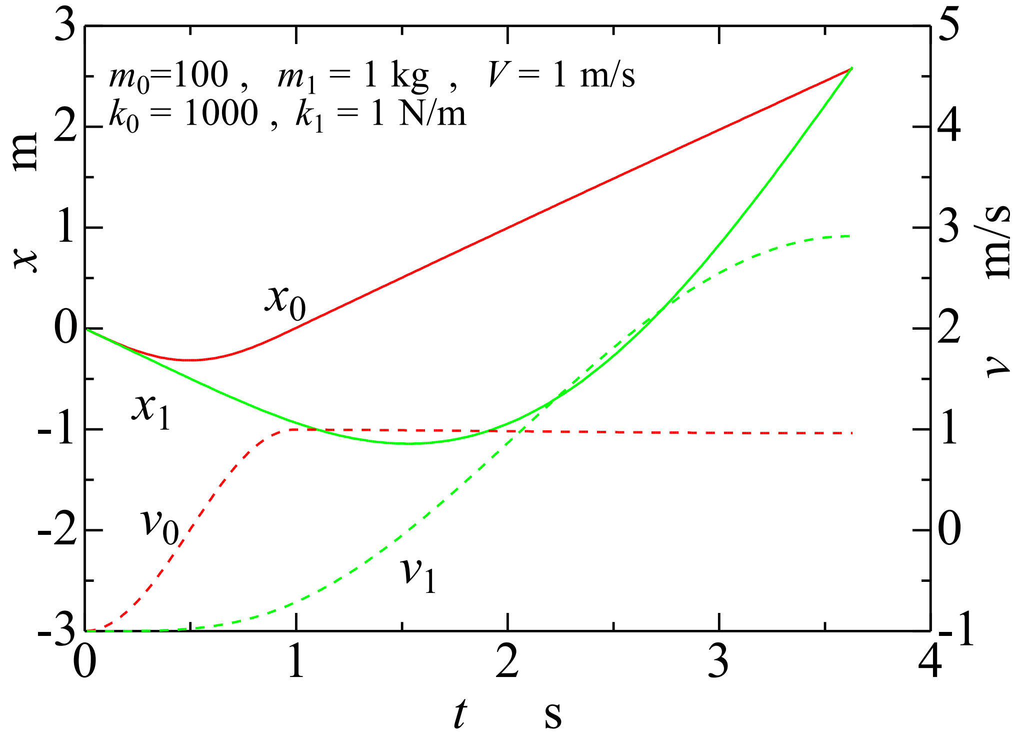
$$\frac{k_0}{k_1} = \frac{m_0}{m_1}$$

まずk_0が縮み,
　続いてk_1が縮む。

m_0に遅れてm_1が反発

$V_0 < V_1$ となる。

$K_0/K_1 = 1000$

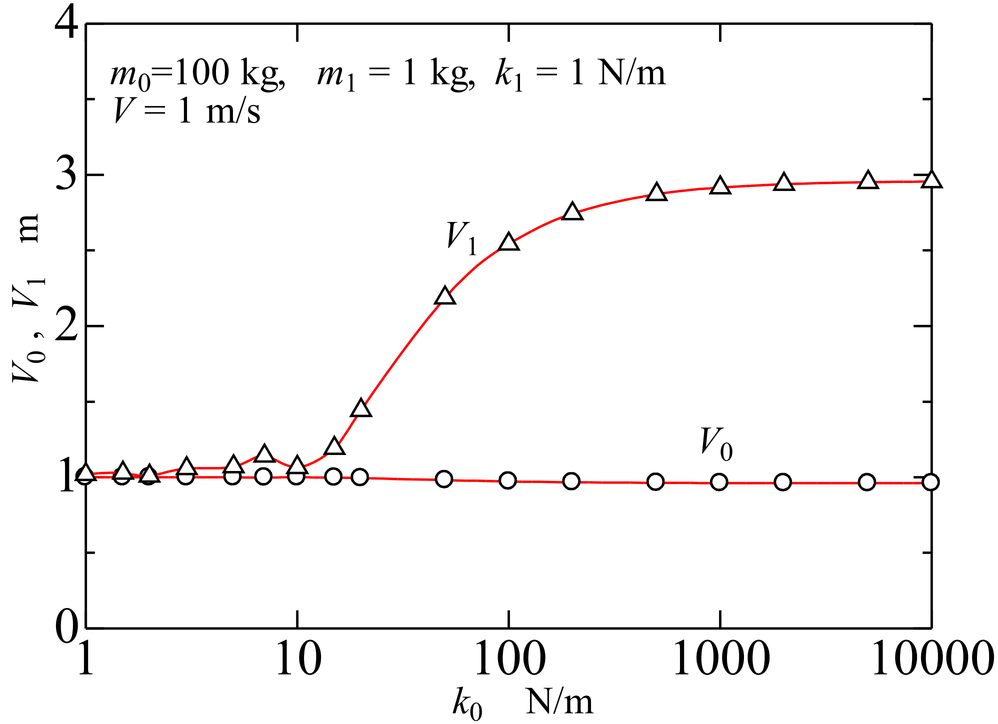


$$\frac{k_0}{k_1} > \frac{m_0}{m_1}$$

k_0が少し縮み,
続いてk_1が大きく縮む。
m_0は短時間で反発し
m_1は遅れて反発

V_1は3Vに近づく

まとめ（m_0/m_1=100)



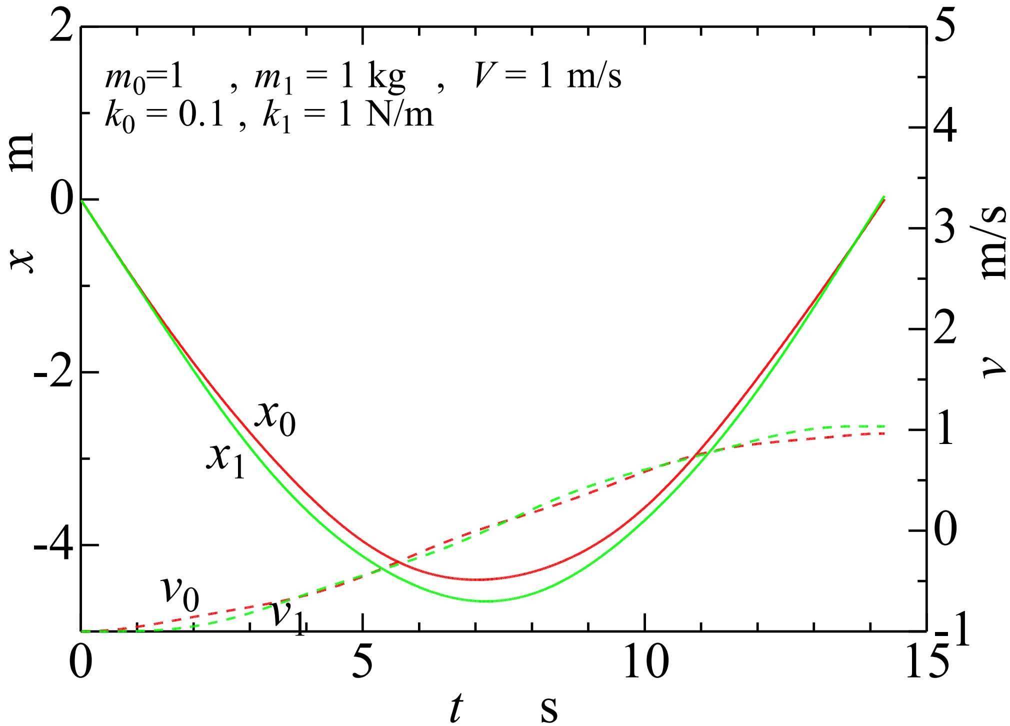
V_0はほぼ概ねVとなる

V_1はk_0/k_1に依存する

k_0/k_1<10ではV_1= V

k_0/k_1>1000でV_1=3V

$k_0/k_1=0.1$ ($m_0/m_1=1$)



$$\frac{k_0}{k_1} < \frac{m_0}{m_1}$$

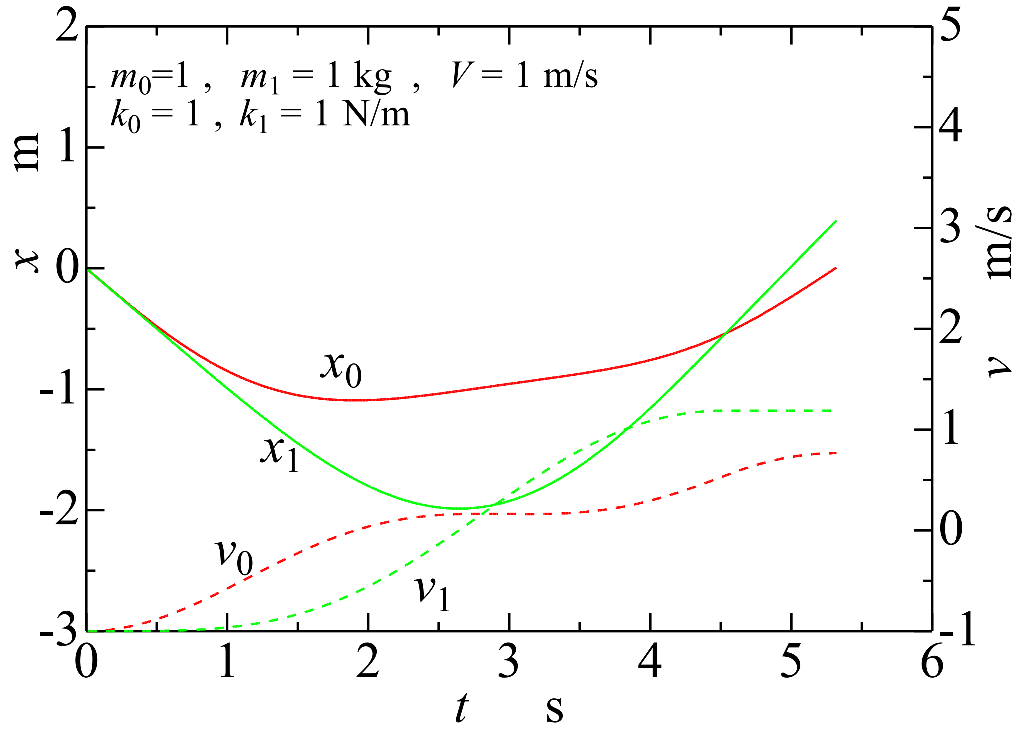
k_0が大きく縮み,

k_1が少し縮む

m_0とm_1はほぼ同期

$V_0 = V_1 = V$

$k_0/k_1=1$ ($m_0/m_1=1$)



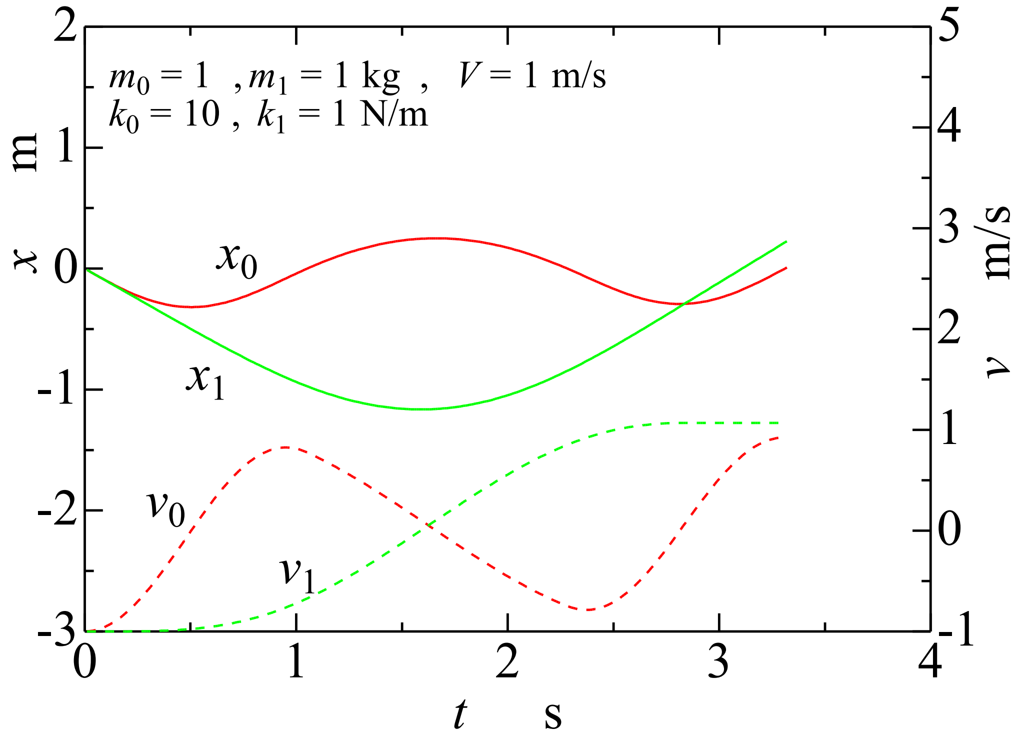
$$\frac{k_0}{k_1}=\frac{m_0}{m_1}$$

まずk_0が縮み，
続いてk_1が縮む。

m_0に遅れて
m_1がゆっくり反発

$V_0<V_1$ となる。

$k_0/k_1=10$ ($m_0/m_1=1$)

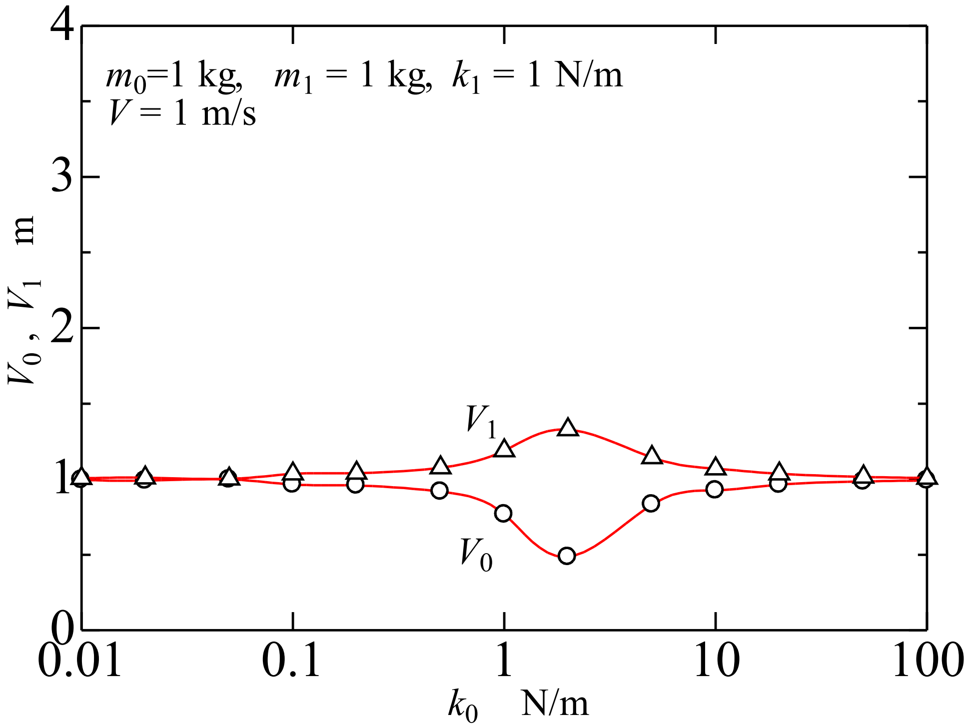


$$\frac{k_0}{k_1} > \frac{m_0}{m_1}$$

K_0が縮み
m_0が短時間で反発
m_1との間で1回振動
k_1は大きく縮み,
m_1はゆっくり反発

V_0, V_1共にVに近づく

まとめ ($m_0/m_1=1$)

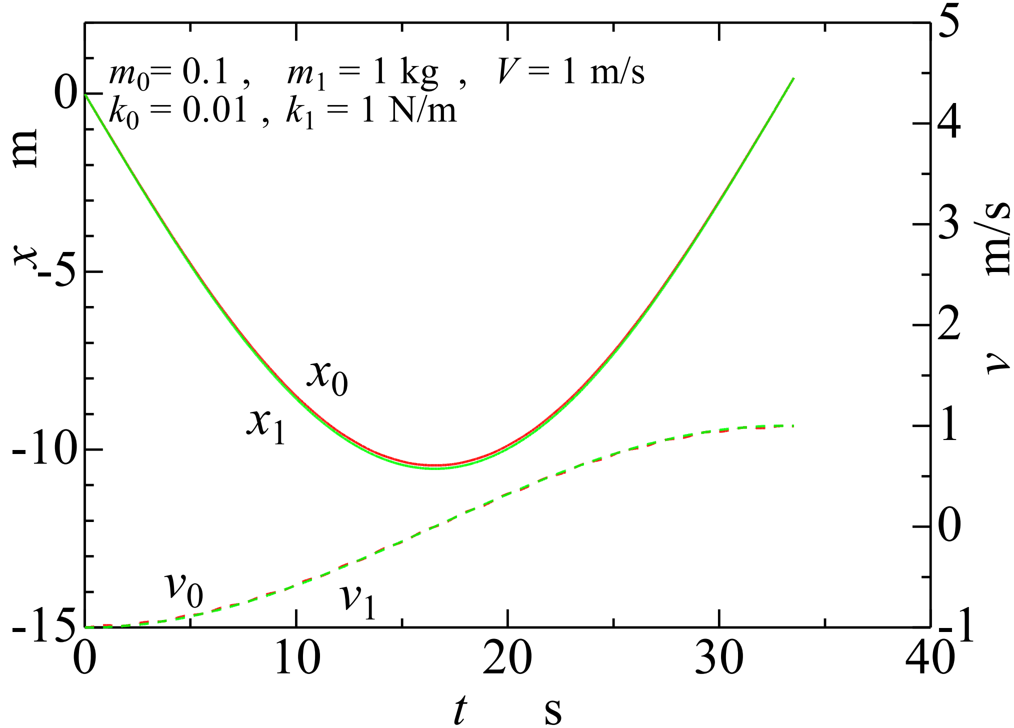


V_0, V_1は概ねVとなる

k_0/k_1=1～5 では

V_0とV_1に差が生じる

$k_0/k_1=0.01$ ($m_0/m_1=0.1$)



$$\frac{k_0}{k_1} < \frac{m_0}{m_1}$$

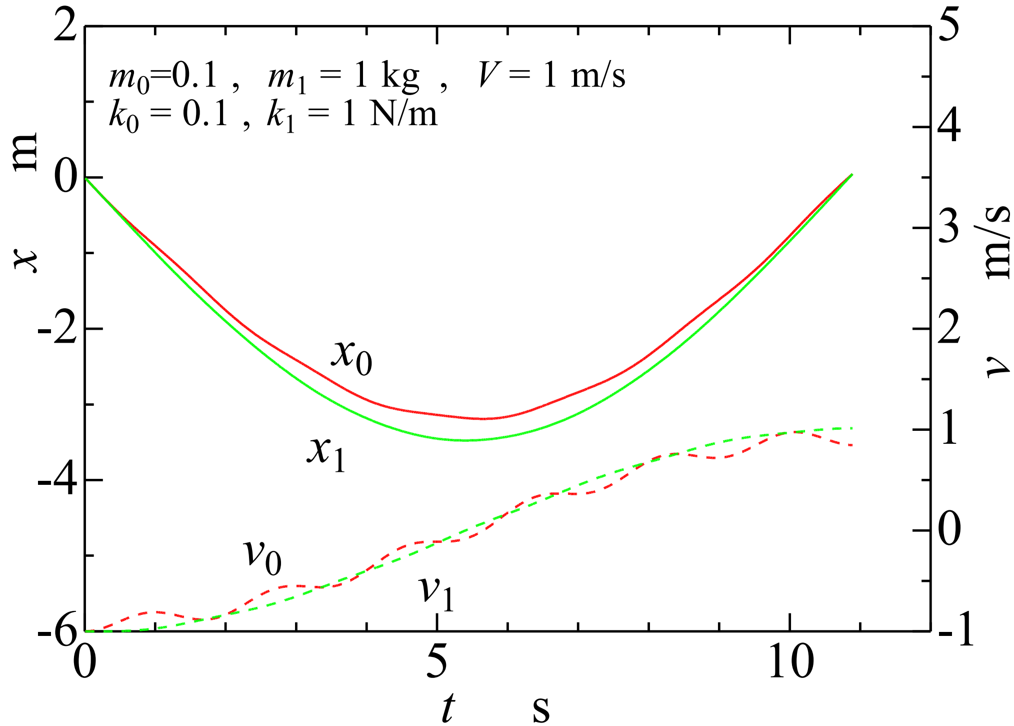
k_0だけ大きく縮み，

k_1はほとんど縮まない

m_0とm_1はほぼ一体

$V_0=V_1=V$

$k_0/k_1=0.1$ $(m_0/m_1=0.1)$



$$\frac{k_0}{k_1}=\frac{m_0}{m_1}$$

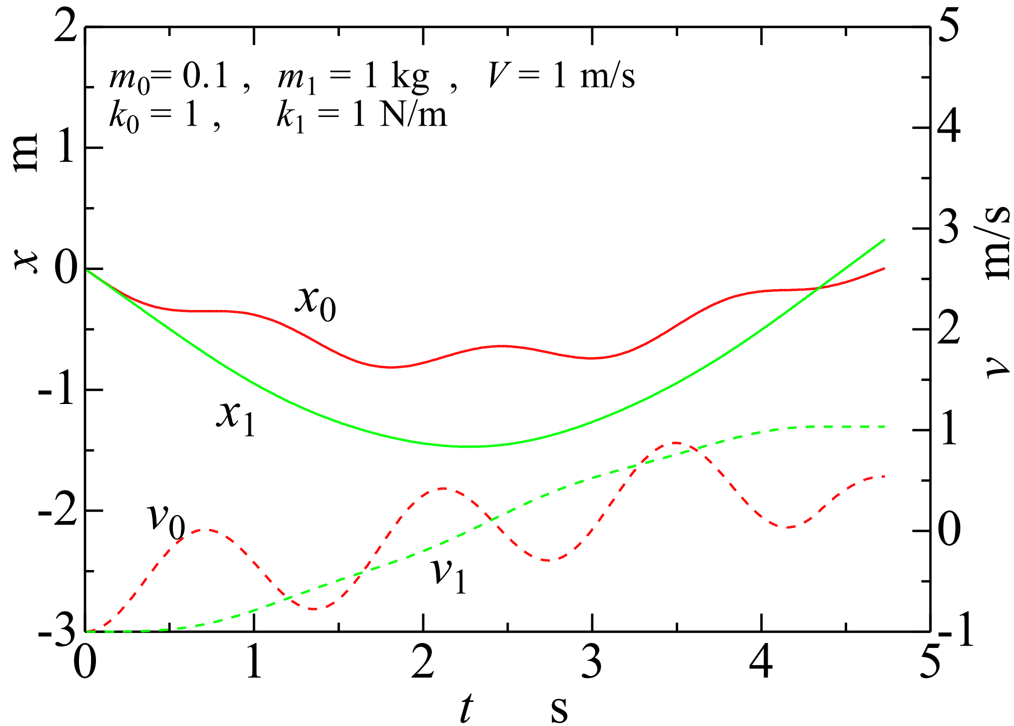
k_0が大きく縮み,

k_1はあまり縮まない

m_0はやや振動的

V_0, V_1 共にVに近い

$k_0/k_1=1$ ($m_0/m_1=0.1$)

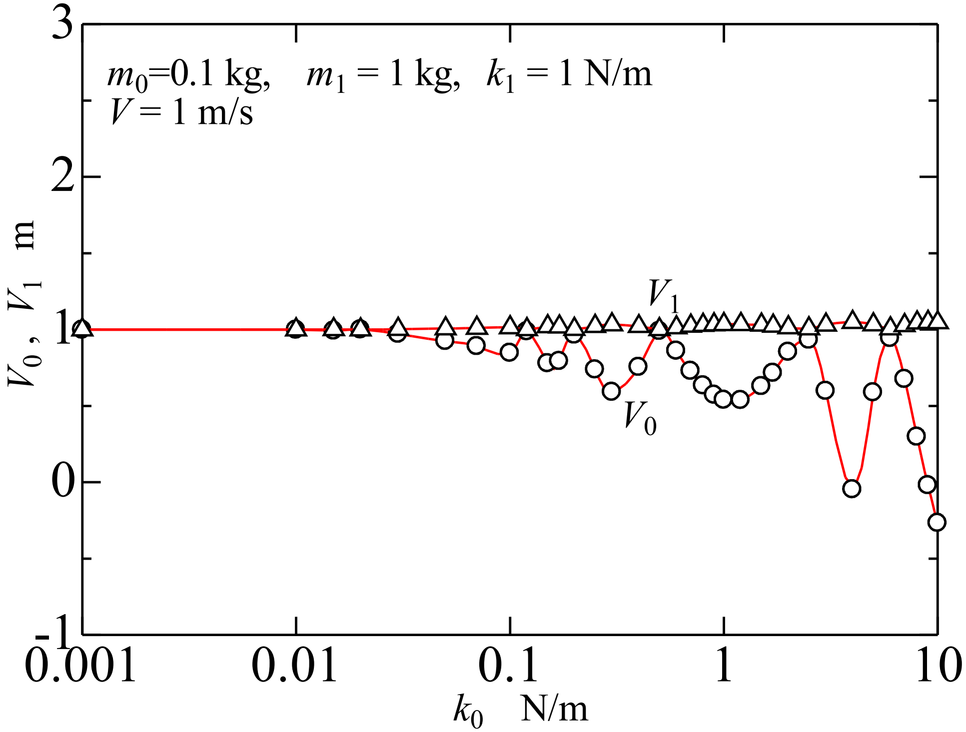


$$\frac{k_0}{k_1} > \frac{m_0}{m_1}$$

m_0がは振動的となる
m_1がゆっくり反発し,
V_1はVとなる

V_0は Vより小さいが
不明？

まとめ (m_0/m_1=0.1)



k_0/k_1<0.01 では

V_0 = V_1= V

k_0/k_1>0.1 では

V_1 はほぼVとなる

m_0は振動的となり,

V_0はV以下で不定

結論

ボール0にボール1を重ねて床に落とした時，反発後の両ボールの速度について検討した結果以下の結論を得た。

1. ボール0の質量がボール1の質量に比べて十分大きい場合，　$(m_0 \gg m_1)$
大きいボール（ボール0）の最終速度はほぼVとなる。
ボール1の最終速度はk_0/k_1に依存し，k_0/k_1が小さい時 V となり，大きい時 3V となる。

2. ボール0の質量がボール1の質量に比べて十分小さい場合，　$(m_0 \ll m_1)$
大きいボール（ボール1）の最終速度はほぼVとなる。
ボール0の最終速度はk_0/k_1が小さい時 V となり，k_0/k_1が大きくなると振動的となり k_0/k_1 に敏感に依存する。

3. 両ボールの質量が同程度の場合，　$(m_0 \approx m_1)$
k_0/k_1が同程度の時に両ボールの最終速度に差が生じ，それ以外では共にVに近い値となる。